Московский ин-т электронного машиностроения, вып.5, 1969 г.

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОМПАКТНЫХ ГРУПП ЛИ

В.Г.Кац

Цель заметки – показать, как из компактных полупростых групп Ли ранга I и 2 чисто алгебраически сконструировать любую связную компактную полупростую группу Ли. Для некомпактных полупростых групп Ли аналогичный вопрос рассматривал Титс [I].

I. Рассмотрим связную компактную полупростую группу Ли ранга n (n – размерность максимального тора группы G). Как известно, в группе G существует n "канонических" подгрупп H_i, $i = 1, 2, \dots, n$ обладающих следующими свойствами:

(ПI) подгруппы H_i порождают (в общеалгебраическом смысле) группу G;

(П2) каждая подгруппа H_i является образом при некотором гомоморфизме $\varphi_i : SU(2) \longrightarrow G$;

(П3) каждая подгруппа H_{ij}, порожденная подгруппами H_i и H_j, является образом при некотором гомоморфизме φ_{ij} одной из групп ранга 2:

$SU(2) \times SU(2)$, $SU(3)$, $Sp(2)$ и G_2;

(П4) для групп ранга 2 гомоморфизмы φ_1 и φ_2 – обозначим их для удобства через s_1 и s_2, – устроены следующим образом:

а) $SU(2) \times SU(2)$: s_1 и s_2 – вложения сомножителей в прямое произведение;

б) $SU(3)$: $s_1(A) = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$, $s_2(A) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & A \end{array}\right)$,

где $A \in SU(2)$;

в) $Sp(2)$ ж): $s_1(A) = A$, $s_2(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha + \beta j \end{pmatrix}$,

где $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in SU(2)$.

г) G_2 : зафиксируем для определенности гомоморфизмы s_1 и s_2 (их явный вид нам не понадобится);

(П5) каждой упорядоченной паре $i, j = 1, 2, \dots, n$, $i \neq j$ соответствует перестановка (k_1 , k_2), так что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} & G & \\ SU(2) \arrow[ur, "\varphi_i"] \arrow[dr, "s_{k_1}"'] & & SU(2) \arrow[ul, "\varphi_j"'] \arrow[dl, "s_{k_2}"] \\ & A_{ij} \arrow[uu, "\varphi_{ij}"] & \end{tikzcd} \qquad (I)$$

где A_{ij} – соответствующая группа ранга 2.

ж) Группа $Sp(2)$ здесь реализована матрицами второго порядка над телом кватернионов с базисом $1, i, j, k$.

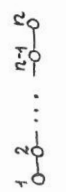
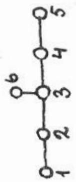
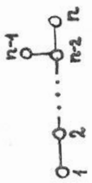
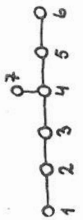
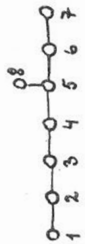
После комплексных чисел считается естественным образом вложенным в это тело.

Группе G обычно сопоставляется схема Дынкина: на плоскости берется n точек $P_1, \dots, P_n$; если φ_{ij} – гомоморфизм группы $SU(2)\times SU(2)$, то точки P_i и P_j не соединяются; если φ_{ij} – гомоморфизм групп $SU(3)$, $Sp(2)$ или G_2, то эти точки соединяются одним, двумя или тремя отрезками соответственно, причем в последних двух случаях эти отрезки снабжаются стрелкой *), указывающей на точку P_i, если $k_1 < k_2$ в диаграмме (I).

В следующей таблице приведены схемы всех простых компактных групп Ли. Схема полупростой компактной группы Ли является объединением нескольких схем их этой таблицы.

Таблица I

Таблица 1

G	Схема	$\dim G$	G	Схема	$\dim G$
A_n		n^2+2n	G_2		14
B_n		$2n^2+n$	F_4		52
C_n		$2n^2+n$	E_6		78
D_n		$2n^2-n$	E_7		133
			E_8		248

Все вышеперечисленные факты легко выводятся из структурной теории компактных алгебр Ли (см., например, [2]).

2. Мы теперь в состоянии привести основную конструкцию, относящую каждой схеме Дынкина $\mathcal{D}$ некоторую группу $G(\mathcal{D})$. Сопоставим каждой точке P_i схемы $\mathcal{D}$ по экземпляру группы $SU(2)$ – обозначим его через $SU(2)_i$. Пусть $S(\mathcal{D}) = \mathop{*}\limits_{i=1}^{n} SU(2)_i$ – свободное произведение этих групп. Обозначим через $N_{ij}(\mathcal{D})$

*) В остальных случаях гомоморфизмы s_1 и s_2, очевидно, симметричны, т.е. в диаграмме (I) их можно поменять местами.

ядро гомоморфизма $s_1 * s_2 : SU(2)_i * SU(2)_j \longrightarrow A_{ij}$, где A_{ij} - одна из групп $SU(2)\times SU(2)$, $SU(3)$, $Sp(2)$ или G_2, если соответственно точки P_i и P_j не соединены, или соединены одним, двумя или тремя отрезкам и стрелка указывает (в последних двух случаях) на точку P_i. Пусть $N(\mathcal{D})$ - нормальный делитель в $S(\mathcal{D})$, порожденный всеми подгруппами N_{ij} ($\mathcal{D}$ Положим $G(\mathcal{D}) = {}^{S(\mathcal{D})}/N(\mathcal{D})$. В заметке буде доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Пусть G - связная полупростая компактная группа Ли, $\mathcal{D}$ - ее схема Дынкина. Тогда $G = G(\mathcal{D})/K$, где K - конечная группа, лежащая в центр группы $G(\mathcal{D})$.

3. Выпишем некоторые соотношения в группах ранга I и 2.

ЛЕММА I. Пусть T и T' - однопараметрические подгруппы группы $SU(2)$, состоящие из всех диагонал ных матриц и матриц вида $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ соответственно. Тогда всякий элемент $g \in SU(2)$ можно пре ставить в виде,

$$g = t g' g'', \tag{2}$$

где $t, g'' \in T$, $g' \in T'$.

ЛЕММА 2. В группах ранга 2 положим $T_i = s_i(T)$, $i = 1,2$, где T - диагональная подгруппа группы $SU(2)$. Тогда

$$t_i t_j = t_j t_i, \quad t_i g_j t_i^{-1} = \tilde{g}_j, \quad i,j = 1,2, \tag{3}$$

где $t_i \in T_i$; $g_j, \tilde{g}_j \in H_j$.

ЛЕММА 3. Между элементами "канонических" подгрупп H_1 и H_2 в группах ранга 2 выполняются следующие соотношения (элемент с индексом k_i принадлежит подгруппе H_{k_i}):

$$SU(2)\times SU(2): \quad g_{k_1} g_{k_2} = g_{k_2} g_{k_1} \tag{4}$$

$SU(3)$: для любых трех элементов g_{k_1}, g_{k_2}, $\tilde{g}_{k_1}$ можно так подобрать элементы f_{k_2}, f_{k_1}, $\tilde{f}_{k_2}$, чтобы

$$g_{k_1} g_{k_2} \tilde{g}_{k_1} = f_{k_2} f_{k_1} \tilde{f}_{k_2} \tag{5}$$

$Sp(2)$: для любых четырех элементов g_{k_1}, g_{k_2}, $\tilde{g}_{k_1}$, $\tilde{g}_{k_2}$ можно так подобрать элементы f_{k_2}, f_{k_1}, $\tilde{f}_{k_2}$, $\tilde{f}_{k_1}$, чтобы

$$g_{k_1} g_{k_2} \tilde{g}_{k_1} \tilde{g}_{k_2} = f_{k_2} f_{k_1} \tilde{f}_{k_2} \tilde{f}_{k_1}. \tag{6}$$

Все эти три леммы можно проверить непосредственными вычислениями. Справедливости ради нужно отметить, что проверке соотношений (5) и (6) сопутствуют довольно таки неприятные выкладки.

4. Для облегчения дальнейших рассуждений удобно с группой G связать некоторую полугруппу $\mathcal{J}(G)$ следующим образом: сопоставим точке с номером i схемы Дынкина образующий элемент h_i полугруппы $\mathcal{J}(G)$; получим:

$$h_i^2 = h_i; \tag{7}$$

$$h_i h_j = h_j h_i, \tag{8}$$

если точки с номерами i и j не соединены;

$$h_i h_j h_i = h_j h_i h_j, \tag{9}$$

если соответствующие точки соединены одним отрезком;

$$h_i h_j h_i h_j = h_j h_i h_j h_i, \tag{10}$$

если соответствующие точки соединены двумя отрезками.

З а м е ч а н и е. Во всех последующих рассуждениях мы ограничиваемся рассмотрением простых групп Ли, так как всякая полупростая компактная группа Ли локально изоморфна прямому произведению простых. Группа G_2 не рассматривается, так как для нее доказываемая теорема тривиальна.

ЛЕММА 4. Используя только соотношения (7) - (10) произвольное слово $s \in \mathcal{J}(G)$ можно привести к следующему каноническому виду ж):

$$\mathcal{J}(A_n):\ a_n = h_n \cdot h_{n-1} h_n \cdot h_{n-2} h_{n-1} h_n \cdot \ldots \cdot h_1 h_2 \ldots h_n \tag{11}$$

$$\mathcal{J}(B_n) = \mathcal{J}(C_n):\ b_n = c_n = h_n \cdot h_{n-1} h_n h_{n-1} \cdot \ldots \cdot h_1 h_2 \ldots h_{n-1} h_n h_{n-1} \ldots h_2 h_1 \tag{12}$$

$$\mathcal{J}(D_n):\ d_n = h_{n-1} h_n \cdot h_{n-2} h_{n-1} h_n h_{n-2} \cdot \ldots \cdot h_1 h_2 \ldots h_{n-1} h_n \ldots h_2 h_1 \tag{13}$$

$$\mathcal{J}(F_4):\ f_4 = b_3' h_1 h_2 h_3 h_2 h_1 \cdot h_4 h_3 h_2 h_1 \cdot h_3 h_2 h_4 h_3 h_2 h_1 \tag{14}$$

$$\mathcal{J}(E_6):\ e_6 = d_5' h_1 h_2 h_3 h_4 h_6 h_3 h_2 h_1 \cdot h_5 h_4 h_3 h_2 \cdot h_6 h_3 h_2 h_1 \tag{15}$$

$$\mathcal{J}(E_7):\ e_7 = e_6' \cdot h_1 h_2 h_3 h_4 h_5 h_7 h_4 h_3 h_2 h_1 \cdot h_6 h_5 h_4 h_3 h_2 \cdot h_7 h_6 h_5 h_4 h_3 \cdot h_7 h_6 h_5 h_4 h_3 h_2 h_1 \tag{16}$$

ж) Здесь выписаны слова "общего положения"; канонический вид любого слова некоторых букв не содержит.

$$\mathcal{J}(E_8):\ e_8 = e_7' \cdot h_1 h_2 h_3 h_4 h_5 h_6 h_8 h_5 h_4 h_3 h_2 h_1 \cdot$$
$$\cdot h_7 h_6 h_5 h_4 h_3 h_2 \cdot h_8 h_5 h_4 h_3 \cdot h_6 h_5 h_4 \cdot h_7 h_6 h_5 \cdot$$
$$\cdot h_8 h_5 h_4 h_3 h_2 h_1 \cdot h_6 h_5 h_4 h_3 h_2 \cdot h_7 h_6 h_5 h_4 h_3 \cdot$$
$$\cdot h_8 h_5 h_4 \cdot h_6 h_5 \cdot h_7 h_6 h_8 \cdot h_5 h_4 h_3 h_2 h_1 , \qquad (\text{I7})$$

где b_3', d_5', ... обозначают канонический вид, соответствующий схемам групп F_4, E_6, ... с отброшенной первой точкой и оставшейся нумерацией.

Доказательство. Будем рассуждать индукцией по числу точек схемы. Рассмотрим $\mathcal{J}(A_n)$. Если $h_1 \bar{\in} s$, то можно воспользоваться индуктивным предположением; в противном случае можно записать: $s = s_1 h_1 s_2$, где $h_1 \bar{\in} s_1$. Пользуясь соотношениями (7)-(9), будем "перегонять" буквы, стоящие правее s_1, справа налево. При этом, как легко видеть, слово s приведется к виду: $s = s_3 h_1 h_2 \cdots h_i$, где $i \leq n$ и $h_1 \bar{\in} s_3$. Применив к слову s_3 индуктивное предположение, получим требуемое.

Для $\mathcal{J}(B_2) = \mathcal{J}(C_2)$ и $\mathcal{J}(\mathcal{D}_2)$ соответствующие формулы очевидны, а вышеприведенные рассуждения, примененные к $\mathcal{J}(B_n) = \mathcal{J}(C_n)$ и $\mathcal{J}(\mathcal{D}_n)$ быстро приводят к цели.

Те же рассуждения, примененные последовательно к полугруппам $\mathcal{J}(F_4)$ и $\mathcal{J}(E_i)$, $i = 6, 7, 8$, приводят к такому правилу, следуя которому можно получить канонический вид слова "общего положения" для этих полугрупп: сначала выписывается канонический вид для схемы с отброшенной первой точкой, затем пишем h_1 и далее за каждой буквой следует буква с наименьшим номером, которую нельзя "перегнать" справа налево.

Обозначим через q количество букв в каноническом слове "общего положения" (II)-(I7). Для дальнейшего важно только знать, чему равно число $2q + n$ для каждой из групп.
(Напомним, что n - ранг группы G). Эти числа приведены ниже.

Таблица 2

Группа	A_n	B_n, C_n	$\mathcal{D}_n$	F	E_6	E_7	E_8
$2q+n$	n^2+2n	$2n^2+n$	$2n^2-n$	52	78	I33	248

Замечание. Как известно, группа с образующими $h_1, \ldots, h_n$ и определяющими соотношениями (8)-(I0) и $h_i^2 = \mathrm{I}$, $i = \mathrm{I}, 2, \ldots n$, изоморфна группе Вейля W группы Ли G. Рассуждения, примененные при доказательстве леммы 4, для группы W дают, очевидно тот же результат. Таким образом, заодно нами получен канонический вид для элемента группы Вейля через образующие отражения. Наложив некоторые ограничения на этот вид, можно доказать его единственность, так как порядок группы W известен.

5. Нам понадобится еще одна лемма.

ЛЕММА 5. В группе $SU(2)$ всякий нормальный делитель (в том числе и незамкнутый) лежит в центре.

Доказательство. Как известно, в $SU(2)$ всякий нетривиальный замкнутый нормальный делитель лежит в центре. Так как замыкание нормального делителя – нормальный делитель, то достаточно показать, что в $SU(2)$ нет всюду плотных нормальных делителей. Предположим противное, – пусть $N \subset SU(2)$ такой нормальный делитель. Тогда его связная компонента единицы N_0 тоже является нормальным делителем. Более того, N_0 – всюду плотный нормальный делитель. В самом деле, иначе $N_0 = \{e\}$ и потому N – вполне несвязный нормальный делитель, откуда следует, что N содержится в центре $SU(2)$, что невозможно. Таким образом, существует целая кривая, лежащая в N, следовательно, и пересечение N с диагональной подгруппой T группы $SU(2)$ содержит целую кривую. Отсюда получаем, что N содержит всю группу T, и потому $N = SU(2)$.

Замечание. Для произвольной компактной группы Ли такое же утверждение легко вывести из леммы 5.

6. Доказательство теоремы. Обозначим через $H_i(\mathcal{D})$ образ подгруппы $SU(2)$ при естественном гомоморфизме $S(\mathcal{D})$ на $G(\mathcal{D})$,

и через $T_i(\mathcal{D})$, $T_i'(\mathcal{D})$ образы при этом гомоморфизме однопараметрических подгрупп T и T' группы $SU(2)$ – см. лемму I. Сравнивая леммы 3 и 4, получаем, что каждый элемент группы $G(\mathcal{D})$ можно записать в виде (II)-(I7), соответствующем схеме $\mathcal{D}$, где h_i здесь обозначает некоторый элемент из группы $H_i(\mathcal{D})$ (если в этом слове группа h_i встречается несколько раз, то каждый раз она обозначает вообще говоря разные элементы группы $H_i(\mathcal{D})$). Леммы I и 2 теперь дают, что каждый элемент $g \in G(\mathcal{D})$ можно записать в виде:

$$g = t_1 t_2 \ldots t_n s_1. \tag{I8}$$

Здесь $t_i \in T_i(\mathcal{D})$, s_1 – слово вида (II)-(I7) и h_i уже обозначает элемент $g_i' g_i''$, где $g_i' \in T_i'(\mathcal{D})$, $g_i'' \in T_i(\mathcal{D})$. В самом деле, по лемме I, $g = s_1 h_i = s_1 t_i g_i' g_i''$. Пользуясь соотношениями (3) можно элемент t_i "перегнать" в начало слова s_1, не меняя при этом вида этого слова. Проделывая ту же операцию последовательно справа налево для всех элементов слова s_1, получим требуемое.

Сопоставим теперь каждому слову вида (I8) соответствующий элемент группы $G(\mathcal{D})$. Так как каждая буква в слове (I8) "пробегает", очевидно, окружность T, то мы получаем отображение (но отнюдь не гомоморфизм) $\varphi: T^{2q+n} \longrightarrow G(\mathcal{D})$, которое является отображением на всю группу $G(\mathcal{D})$. (Напомним,что q -число букв в слове (II)-(I7)).

Далее,в силу свойств (П I)-(П 5) существует естественный гомоморфизм ψ группы $G(\mathcal{D})$ на G. Мы получили следующую цепочку отображений:

$$T^{2q+n} \xrightarrow{\varphi} G(\mathcal{D}) \xrightarrow{\psi} G.$$

Заметим теперь, что из таблиц I и 2 видно (!), что

$$\dim G = 2q+n$$

Следовательно отображение $\psi_\circ \varphi$ является отображением компактных многообразий одинаковой размерности, причем, очевидно, - гладкое. Теперь можно применить теорему Сарда (см.,например, [3]), которая утверждает,что мера образа множества точек, в которых якобиан отображения $\psi_\circ\varphi$ обращается в 0, равна 0. Так как $\psi_\circ\varphi$ отображает многообразие T^{2q+n} на все многообразие G, то по теореме Сарда найдется точка, полный прообраз которой при этом отображении состоит из конечного числа точек. Следовательно, и подавно, полный прообраз этой точки конечен при отображении ψ. Итак, ядро K гомоморфизма ψ конечно.

Осталось доказать, что группа K содержится в центре группы $G(\mathcal{D})$. Построим гомоморфизм

$\alpha_i : H_i(\mathcal{D}) \longrightarrow Aut\, K$ следующим образом:

$\alpha_i(g)\kappa = g\kappa g^{-1}$, где $g \in H_i(\mathcal{D})$, $\kappa \in K$

Так как группа Aut конечна, то по лемме 5, гомоморфизм α_i тривиален. Следовательно, все подгруппы $H_i(\mathcal{D})$ коммутируют с группой K, а так как они порождают $G(\mathcal{D})$, группа K содержится в центре $G(\mathcal{D})$. Теорема полностью доказана.

З а м е ч а н и е. Остается открытым такой вопрос: если G - связная односвязная компактная группа Ли, то $G = G(\mathcal{D})$.

З а м е ч а н и е. Конструкция, изложенная в п.2, для схем, отличных от схем Дынкина, дает некоторые "бесконечномерные" группы. В этом случае возможно следующее обобщение нашей теоремы:всякий нормальный делитель группы $G(\mathcal{D})$ содержится в ее центре. Попытки доказать эту теорему не увенчались успехом.

Автор благодарит Э.Б.Винберга за постановку задачи и ценные советы.

Литература

I. Титс Ж. Изотропные полупростые группы, Математика (сборник переводов) 9, № I (1965), стр.I40-I48.

2. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы, М., I954.

3. Ленг С. Введение в теорию дифференцируемых многообразий, М., I967.