Uspechi mat. nauk, V 30 , w 6 , 1975

К ВОПРОСУ ОБ ОПИСАНИИ ПРОСТРАНСТВА ОРБИТ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГРУПП

В. Г. Кац

Для многих неприводимых линейных алгебраических групп имеется описание пространства орбит. К ним относятся присоединенные группы, представления в многочленах и поливекторах малых степеней и размерностей для классических линейных групп, спинорные представления малых размерностей, простейшие представления особых групп и др. Обычно либо с ростом размерности качественная картина не меняется, либо — начиная с некоторого момента — структура пространства орбит резко усложняется, а затем возникает то, что принято называть «безнадежной задачей». Например, для Spin_n этот момент наступает при $n = 16$ для четных n и $n = 13$ при нечетных, а для $\Lambda^3\,\mathrm{SL}_n$ при $n = 9$.

Линейную алгебраическую группу $\mathscr{G}$, действующую в векторном пространстве V, назовем *обозримой*, если многообразие нулей всех однородных $\mathscr{G}$-инвариантных многочленов ненулевой степени на V распадается на конечное число орбит группы $\mathscr{G}$.

Простейшим признаком «сложности» пространства орбит естественно считать необозримость. В заметке классифицируются связные неприводимые обозримые линейные группы. Список полупростых таких групп следующий: SL_n, Sp_n, SO_n, их симметрический и кососимметрический квадраты, их попарные тензорные произведения, $\mathrm{Ad}\,\mathrm{SL}_n$, $\mathrm{SL}_2 \otimes \mathrm{SL}_3 \otimes \mathrm{SL}_n$ и еще 55 штук; простые группы, кроме присоединенных групп, перечислены в таблице 1.

Таблица 1

$\mathscr{G}$	t	$\mathscr{G}$	t	$\mathscr{G}$	t	$\mathscr{G}$	t
SL_n	0	$\Lambda^2\mathrm{Sp}_n/1$	$\frac{n}{2}-1$	$S^3\mathrm{SL}_2$	1	Spin_{16}	8
Sp_n	0	$S^2\mathrm{SO}_n/1$	$n-1$	$S^3\mathrm{SL}_3$	2	$\Lambda^3\mathrm{Sp}_6/\mathrm{Sp}_6$	1
SO_n	1	$\Lambda^3\mathrm{SL}_n$ $n=6, 7, 8$	1	Spin_n $n=7, 9, 11, 12, 14$	1	$\Lambda^4\mathrm{Sp}_8/\Lambda^2\mathrm{Sp}_8$	6
$S^2\mathrm{SL}_n$	1	$\Lambda^3\mathrm{SL}_9$	4	Spin_{10}	0	$\mathbf{G}_2$, $\mathbf{E}_6$, $\mathbf{E}_7$	1
$\Lambda^2\mathrm{SL}_n$	$\varepsilon(n)$	$\Lambda^4\mathrm{SL}_8$	7	Spin_{13}	2	$\mathbf{F}_4$	2

Гипотеза. *Группы из таблицы 1 вместе с присоединенными группами суть все связные простые неприводимые линейные группы с алгеброй инвариантов, изоморфной алгебре многочленов.*

Нетрудно показать, что этот список дает все связные простые неприводимые линейные группы, для которых размерность общего многообразия уровня инвариантов равна размерности многообразия их нулей.

Оказывается, что, кроме небольшого числа исключений, неприводимые обозримые линейные группы получаются единой конструкцией по автоморфизмам конечного порядка простых алгебр Ли. Это позволяет применить к классификации орбит этих групп технику теории простых алгебр Ли. Отметим, наконец, что «разрешимым колчанам» [3] соответствуют приводимые обозримые линейные группы.

Основное поле k — алгебраически замкнутое характеристики 0. Все группы предполагаются связными линейными алгебраическими, определенными над k. Простейшие представления особых групп обозначаются теми же буквами, что и группы; одномерное представление обозначается через 1, $\varepsilon(n) = (1 + (-1)^n)/2$.

1. Основные леммы. Наши рассмотрения основаны на следующей простой лемме.

Лемма 1 (Э. Б. Винберг). *Пусть $\mathscr{G}$ — линейная группа, действующая в пространстве V; $\mathscr{H}$ — ее подгруппа; G, H — их алгебры Ли, причем $G = H \oplus M$, где M — подпространство. Пусть $V = V_0 \oplus V_1$ и $HV_0 \subset V_0$, $MV_0 \subset V_1$. Тогда $\mathscr{G}(x) \cap V_0$ $(x \in V)$ распадается на конечное число орбит относительно $\mathscr{H}$.*

Полупростая неприводимая линейная группа $\mathcal{G}$ обычным образом изображается диаграммой Дынкина, снабженной числовыми отметками старшего веса. Обозначим $t = t(\mathcal{G})$ коразмерность орбиты общего положения. Из леммы 1, с учетом положительности элементов матрицы, обратной к матрице Картана простой алгебры Ли, выводится

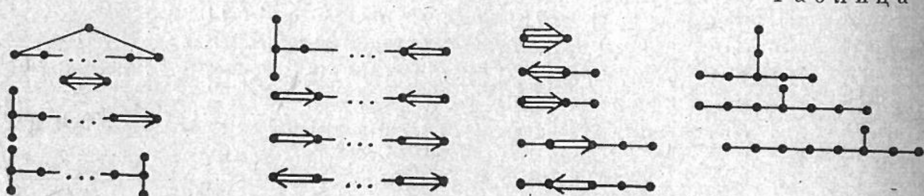
Лемма 2. а) *Любой собственной поддиаграмме диаграммы Дынкина обозримой полупростой неприводимой линейной группы соответствует линейная группа, для которой* $t \leqslant 1$. б) *Кратность любого ненулевого веса обозримой линейной группы равна* 1.

2. Линейные группы, связанные с автоморфизмами простых алгебр Ли. Автоморфизм σ порядка m простой алгебры Ли G задает $\mathbf{Z}_m$-градуировку $G = \bigoplus G_i$. Присоединенному представлению G_0 на G_1 соответствует линейная группа, которую мы назовем *σ-группой*. Из леммы 1 вытекает

Лемма 3. *Для σ-группы существует лишь конечное число орбит с заданными значениями инвариантов. В частности, σ-группы обозримы.*

Пусть S — либо одна из диаграмм Дынкина, либо одна из следующих диаграмм:

Таблица 2



Пусть S_i — поддиаграмма диаграммы S, не содержащая одной точки α_i; $\mathcal{G}(S_i)$ — неприводимая полупростая линейная группа с диаграммой S_i, ненулевые отметки b_t которой получаются так: если $\alpha_t \in S_i$ соединяется $m > 1$ чертами с α_i в S и стрелка направлена к α_t, то $b_t = m$, если же стрелка направлена к α_i или α_i и α_t соединены одной чертой, то $b_t = 1$. Описание автоморфизмов конечного порядка простых алгебр Ли в [1], [2] дает полный список неприводимых σ-групп: 1°. $\mathcal{G}(S_i)$, где S — одна из диаграмм таблицы 2. 2°. $\mathcal{G}(S_i) \otimes k^*$, где S — одна из диаграмм Дынкина.

3. Теорема. *Следующими линейными группами исчерпываются все обозримые неприводимые линейные группы*: а) $\mathcal{G}(S_i)$, *где S — диаграмма Дынкина или диаграмма из таблицы* 2; б) Spin_{11}, Spin_{13}, $\mathrm{Spin}_7 \otimes \mathrm{SL}_3$, $\mathrm{Spin}_7 \otimes \mathrm{SL}_4$, $\mathrm{Spin}_9 \otimes \mathrm{SL}_2$, $\mathbf{G}_2 \otimes \mathrm{SL}_2$, $\mathbf{G}_2 \otimes \mathrm{SL}_3$, $\mathrm{SL}_2 \otimes \mathrm{SL}_3 \otimes \mathrm{SL}_n$ $(n \geqslant 7)$; в) $\mathcal{G} \otimes k^*$, *где $\mathcal{G}$ из* а) *и* б) *и* $t(\mathcal{G}) \leqslant 1$.

Доказательство. Из таблиц работы [4] усматривается, что $t(\mathcal{G}(S_i)) > 1$, когда S — диаграмма из таблицы 2, за исключением групп из таблицы 1 с $t \leqslant 1$ и $\mathrm{Sp}_n \otimes \mathrm{SO}_3$, $\mathrm{Spin}_7 \otimes \mathrm{SL}_2$, $\mathrm{SL}_2 \otimes \mathrm{SL}_3 \otimes \mathrm{SL}_6$; кроме того, $t > 1$ для $\mathbf{G}_2 \otimes \mathcal{H}$ при $\mathcal{H} \neq \mathrm{SL}_2$, $\mathrm{Spin}_7 \otimes \mathrm{SL}_4$, $\mathrm{Spin}_9 \otimes \mathrm{SL}_2$, $S^2\,\mathrm{SL}_3 \otimes \mathrm{Sp}_4$. Поэтому, если $\mathcal{G}$ — обозримая неприводимая линейная группа, то ограничения, накладываемые леммой 2, как нетрудно видеть, дают, что либо $\mathcal{G}$ — группа из а), б), в), либо одна из групп: $S^n\mathrm{SL}_2$, $n \geqslant 5$, $S^2\mathrm{SL}_2 \otimes S^3\mathrm{SL}_2$, $S^3\mathrm{SL}_2 \otimes S^3\,\mathrm{SL}_2$, $\mathbf{G}_2 \otimes \mathrm{Sp}_4$, $\mathbf{G}_2 \otimes \mathrm{SO}_n$ $(n = 3, 4, 5)$, $\mathbf{G}_2 \otimes \mathbf{G}_2$, $\underline{S^2\,\mathrm{SL}_3 \otimes \mathrm{Sp}_4}$. Последние, как нетрудно убедиться, необозримы. Обозримость групп из б) проверяется непосредственно, а из а) и в) — следует из леммы 3, с учетом того, что группа $\mathcal{G} \otimes k^*$ обозрима тогда и только тогда, когда $\mathcal{G}$ обозрима и $t(\mathcal{G}) \leqslant 1$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Г. Кац, Градуированные алгебры Ли и симметрические пространства, Функц. анализ **2**:2 (1968), 93—94.

[2] В. Г. Кац, Автоморфизмы конечного порядка полупростых алгебр Ли, Функц. анализ **3**:3 (1969), 94—96.

[3] Л. А. Назарова, Представления колчанов бесконечного типа, Изв. АН, сер. матем. **37** (1973), 752—791.

[4] А. Г. Элашвили, Стационарные подалгебры точек общего положения для неприводимых линейных групп Ли, Функц. анализ **6**:2 (1972), 65—78.

Поступило в Правление общества 1 октября 1974 г.