SEMINARIO J. C. MOORE *

OPERACIONES COHOMOLOGICAS Y SISTEMAS DE POSTNIKOV

1. Introducción

Sean π, G dos grupos y n, k dos enteros. Una operación cohomológica T con respecto a π, G, n, k asocia a cada espacio topológico X una función

$$T : H^n(X;\pi) \longrightarrow H^{n+k}(X;G)$$

de tal manera que si $f:X \longrightarrow Y$ es una aplicación continua de X en Y, entonces el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H^n(Y;\pi) & \xrightarrow{T} & H^{n+k}(Y;G) \\ \downarrow f & & \downarrow f \\ H^n(X;\pi) & \xrightarrow{T} & H^{n+k}(X;G). \end{array}$$

Sea $\mathcal{K}(\pi,n)$ un espacio topológico tal que

$$\pi_q(\mathcal{K}(\pi,n)) = \begin{cases} 0 & \text{si } q \neq n, \\ \pi & \text{si } q = n. \end{cases}$$

Denotaremos con $\pi(X;Y)$ al conjunto de clases de ho-

---

* Este seminario tuvo lugar en el Instituto de Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de México, en agosto de 1958. Estas notas fueron redactadas por varios de los asistentes al seminario.

motopía de las funciones de X en Y. Se conoce la siguiente propiedad:

<u>Existe una correspondencia buinívoca entre</u> $\pi(X,\mathcal{K}(\pi,n))$ <u>y</u> $H^n(X;\pi)$. <u>La correspondencia es la siguiente:</u>

Sea $f \in \pi(X,\mathcal{K}(\pi,n))$. Entonces f determina

$$f^* : H^n(\mathcal{K}(\pi,n);\pi) \longrightarrow H^n(X;\pi).$$

Tenemos que

$$H^n(\mathcal{K}(\pi,n);\pi) \cong \mathrm{Hom}\,(H_n(\mathcal{K}(\pi,n);\pi) \cong \mathrm{Hom}\,(\pi,\pi)$$

(del teorema de coeficientes universales y del teorema de Hurewicz). Sea i_π el elemento canónico de Hom (π,π), es decir el homomorfismo idéntico. Entonces $f^*(i_\pi) \in H^n(X,\pi)$ y a f se le asocia $f^*(i_\pi)$. Se demuestra que la correspondencia está bien definida y que es biunívoca (ver, por ejemplo [5] pág. 43.)

Sea $\mathcal{O}$ el conjunto de todas las operaciones cohomológicas relativas a π, G, n, k. Con ayuda de la correspondencia arriba mencionada se demuestra el

TEOREMA 1. $H^{n+k}(\mathcal{K}(\pi,n);G)$ <u>está en correspondencia biunívoca con el conjunto</u> $\mathcal{O}$ <u>de las operaciones cohomológicas relativas a</u> π, G, n, k. <u>La correspondencia se define:</u>

Sea

$$v \in H^{n+k}(\mathcal{K}(\pi,n);G).$$

Tomemos un elemento arbitrario $u \in H^n(X,\pi)$. Por lo mencionado antes, se determina una función $f_u : X \longrightarrow \mathcal{K}(\pi,n)$, la cual nos determina

$$f_u^* : H^{n+k}(\mathcal{K}(\pi,n);G) \longrightarrow H^{n+k}(X;G).$$

Definimos entonces

$$T_v : H^n(X;\pi) \longrightarrow H^{n+k}(X;G)$$

con la fórmula

$$T_v(u) = f_u^*(v).$$

La correspondencia inversa se establece en la forma siguiente:

Dada T, tenemos, para $X = \mathcal{K}(\pi,n)$,

$$T : H^n(\mathcal{K}(\pi,n);\pi) \longrightarrow H^{n+k}(\mathcal{K}(\pi,n);G)$$

y a T le asociamos $T(i_\pi)$.

Se demuestra que estas correspondencias están bien definidas y que efectivamente una es inversa de la otra (ver por ejemplo [5] pág. 44).

Sea $A = \sum_n A_n$, $B = \sum_n B_n$ dos grupos graduados con diferencial $d : A_n \longrightarrow A_{n-1}$, $d : B_n \longrightarrow B_{n-1}$, $dd = 0$. Se dice que $f : A \longrightarrow B$ es un homomorfismo de grado k si $f(A_n) \subset B_{n+k}$. Designaremos, mientras no de lugar a confusión,

$$\mathrm{Hom}\,(A,B) = \sum_k \mathrm{Hom}_k\,(A,B),$$

donde $\mathrm{Hom}_k\,(A,B)$ es el grupo de todos los homomorfismos de grado k.

Para el grupo graduado $\mathrm{Hom}\,(A,B)$ se define d con la fórmula

$$(df)\,a = d(fa) + (-1)^{k+1}\,f(da),$$

Si f es de grado k. Evidentemente df es de grado $k-1$.

Si $f \in \mathrm{Hom}\,(A,B)$ es un ciclo de dimensión cero, se tiene

$$0 = d(fa) - f(da),$$

es decir f es un homomorfismo de cadena, e inversamente. Si f, g son homólogos y de grado cero, se tiene

$$(f-g)a = (dF)a = d(Fa) + F(dA),$$

es decir f, g son homotópicas (algebraicamente). De aquí resulta que $H_0(\mathrm{Hom}\,(A,B))$ está en correspondencia biunívoca con $\pi\,(A,B)$.

Si $B_0 = \pi$, $B_q = 0$ para $q \neq 0$, entonces si $0 \neq f \in \mathrm{Hom}_{-k}(A,B)$, entonces $f : A_k \longrightarrow \pi$, es decir,

$$\mathrm{Hom}_{-k}\,(A,B) = \mathrm{Hom}\,(A_k,\pi) = C^k(A,\pi).$$

En este caso, la frontera está dada por la fórmula

$$(df)a = (-1)^{k+1}\,f(da) = (-1)^{k+1}(\delta f)a.$$

Sea ahora X un espacio topológico y Γ un grupo topológico abeliano. $C(X)$ designará el grupo de cadenas singula res de X y $S(\Gamma)$ la colección de simplejos singulares de Γ con la estructura de grupo abeliano dada por el siguiente producto:

$$\Delta_q \longrightarrow \Delta_q \times \Delta_q \longrightarrow \Gamma \times \Gamma \longrightarrow \Gamma,$$

es decir $(\sigma\tau)(t) = \sigma(t)\tau(t)$. La frontera en $S(\Gamma)$ se define con $d\sigma = \prod(\partial_i\sigma)^{\varepsilon(i)}$. Se sabe que

$$H_*(S(\Gamma)) = \pi(\Gamma).$$

Más adelante se demostrará que

$$\pi(X,\Gamma) = H_o(\mathrm{Hom}(C(X), S(\Gamma)).$$

La correspondencia será: si $f : X \longrightarrow \Gamma$, f induce $f_\# : C(X) \longrightarrow C(\Gamma)$. Se tiene además un homomorfismo natural η de $C(\Gamma)$ en $S(\Gamma)$. Formamos la composición

$$C(X) \xrightarrow{f_\#} C(\Gamma) \xrightarrow{\eta} S(\Gamma)$$

que es un homomorfismo de cadena de $C(X)$ en $S(\Gamma)$ y por lo tanto representa un elemento de $H_o(\mathrm{Hom}(C(X),S(\Gamma))$

Se puede probar que

$$\prod_n H^n(X;\pi_n(\Gamma)) = H_o(\mathrm{Hom}(C(X);S(\Gamma)).$$

Combinando esto con el resultado previo se obtiene

$$\pi(X,\Gamma) \cong \prod_n H^n(X;\pi_n(\Gamma)).$$

En el caso particular de que $\Gamma = K(\pi,n)$, se obtiene

$$\pi(X,K(\pi,n)) = H^n(X;\pi),$$

resultado mencionado al principio del párrafo.

Se generalizará el concepto de operación cohomológica en la forma siguiente. Sean Γ y Λ dos grupos topológicos abelianos. Se llamará operación cohomológica a una función

$$T : H_0(\mathrm{Hom}\ (C(X);S(\Gamma)) \longrightarrow H_0(\mathrm{Hom}\ (C(X);S(\Lambda))$$

que conmute con los homomorfismos inducidos por funciones continuas de X en Y. Por lo anterior esto equivale a

$$T: \prod_n H^n(X;\pi_n(\Gamma)) \longrightarrow \prod_n H^n(X;\pi_n(\Lambda)),$$

lo cual generaliza la definición primitiva como se ve tomando

$$\Gamma = K(\pi,n), \quad \Lambda = K(G,n+k).$$

La generalización del teorema mencionado antes será:

TEOREMA 2. $\prod_n(H^n(\Gamma;\pi_n(\Lambda)$ <u>está en correspondencia biunívoca con el conjunto</u> $\mathcal{O}$ <u>de las operaciones cohomológicas generalizadas relativas a</u> Γ, Λ.

Sea $v \in \prod_n(H^n(\Gamma;\pi_n(\Lambda))$. Este determina

$$f_v : \Gamma \longrightarrow \Lambda$$

y si $u \in \prod_n H^n(X;\pi_n(\Gamma))$, análogamente determina

$$f_u : X \longrightarrow \Gamma$$

Entonces $f_v f_u : X \longrightarrow \Lambda$ determina un elemento w de $\prod_n H^n(X;\pi_n(\Lambda))$. La correspondencia que asocia a u el elemento w es la operación cohomológica generalizada T que corresponde a v.

2. Complejos de Grupos

Recordamos brevemente que un <u>complejo semisimplicial</u> $X = \bigcup_{q \geq 0} X_q$ tiene dos operadores, cara y degeneración

$$\partial_i : X_{q+1} \longrightarrow X_q, \quad i = 0, \ldots, q+1,$$

$$s_i : X_q \longrightarrow X_{q+1}, \quad i = 0, \ldots, q,$$

los cuales satisfacen las condiciones

$$\partial_i \partial_j = \partial_{j-1} \partial_i \qquad i < j$$

$$s_i s_j = s_{j+1} s_i \qquad i \leq j$$

$$\partial_i s_j = s_{j-1} \partial_i \qquad i < j$$

$$\partial_j s_j = \partial_{j+1} s_j = \text{ident.}$$

$$\partial_i s_j = s_j \partial_{i-1} \qquad i > j+1$$

Un <u>complejo de monoides</u> Γ es un complejo s.s. tal que cada Γ_q es un monoide con unidad y ∂_i, s_i son homomorfismos que transforman la identidad en la identidad.

Un <u>complejo de grupos</u> es un complejo monoidal en el cual toda Γ_q es grupo. Se llamará abeliano si toda Γ_q es abeliano. Como ejemplos se tienen los simplejos singulares de un grupo topológico, el complejo de cadenas singulares de un espacio topológico, etc.

PROPOSICION 1. *Sea Γ un complejo abeliano de grupos, $D_q(\Gamma)$ el subgrupo de Γ_q generado por los simplejos degenerados y*

$$N_q(\Gamma) = \bigcap_{j=0}^{q-1} \operatorname{Ker} \partial_j .$$

Entonces

$$\Gamma_q / D_q(\Gamma) \cong N_q(\Gamma).$$

El isomorfismo es el inducido por el homomorfismo $\varphi : \Gamma_q \longrightarrow \Gamma_q$ definido por

$$\varphi = \varphi_{q-1}\varphi_{q-2} \cdots \varphi_0,$$

donde $\varphi_i : \Gamma_q \longrightarrow \Gamma_q$ $(i = 0, \ldots, q-1)$ están dados por la fórmula

$$\varphi_i(x) = x(s_i \partial_i x^{-1}).$$

Demostraremos primero varias propiedades de las φ_i, φ, algunas de las cuales se usarán para demostrar la proposición.

1) $\partial_i \varphi_j = \varphi_{j-1} \partial_i$ para $i < j$

2) $\partial_j \varphi_j(x) = 1_{q-1}$

3) $\partial_i \varphi_j = \varphi_j \partial_i$ para $i > j+1$

4) $\partial_{j+1} \varphi_j(x) = (\partial_{j+1} x)(\partial_j x^{-1})$

5) $\varphi_j s_i = s_i \varphi_{j+1}$ para $i < j$

6) $\varphi_j s_{j-1}(x) = (s_{j-1}x)(s_j x^{-1})$

7) $\varphi_j s_j (x) = 1_q$.

Demostraciones.

1) $\partial_i \varphi_j (x) = \partial_i(x(s_j \partial_j x^{-1})) = \partial_i x(\partial_i s_j \partial_j x^{-1}) =$

$= \partial_i x(s_{j-1} \partial_i \partial_j x^{-1}) = \partial_i x(s_{j-1} \partial_{j-1} \partial_i x^{-1}) = \varphi_{j-1}(\partial_i x)$.

2) $\partial_j \varphi_j(x) = \partial_j(x(s_j \partial_j x^{-1})) = \partial_j x(\partial_j x^{-1}) = 1_{q-1}$.

3) $\partial_i \varphi_j(x) = \partial_i x(\partial_i s_j \partial_j x^{-1}) = \partial_i x(s_j \partial_{i-1} \partial_j x^{-1}) =$

$= \partial_i x(s_j \partial_j \partial_i x^{-1}) = \varphi_j \partial_i(x)$.

4) $\partial_{j+1} \varphi_j(x) = \partial_{j+1}x(\partial_{j+1}s_j \partial_j x^{-1}) = \partial_{j+1}x(\partial_j x^{-1})$.

5) $s_i \varphi_j(x) = s_i x(s_i s_j \partial_j x^{-1}) = s_i x(s_{j+1} s_i \partial_j x^{-1}) =$

$= \varphi_{j+1} s_i(x)$.

6) $\varphi_j s_{j-1}(x) = s_{j-1}(x)(s_j \partial_j s_{j-1} x^{-1}) = s_{j-1}x(s_j x^{-1})$.

7) $\varphi_j s_j(x) = s_j x(s_j \partial_j s_j x^{-1}) = s_j x(s_j x^{-1}) = 1_q$.

Pasando a la demostración de la proposición, supongamos primero que $x \in N_q$, es decir, $\partial_j x = 1_{q-1}$ para $j = 0,\ldots,q-1$. Entonces

$$\varphi_j(x) = x(s_j \partial_j x^{-1}) = x(s_j 1_{q-1}) = x\, 1_q = x,$$

de donde también $\varphi(x) = x$, es decir, $\varphi | N_q = \text{ident.}$

Demostraremos ahora que $\varphi(\Gamma_q) \subset N_q$. En efecto, si $x \in \Gamma_q$, $\varphi(x)$ es tal que, para $j = 0, \ldots, q-1$,

$$\partial_j \varphi(x) = \partial_j \varphi_{q-1} \cdots \varphi_j \cdots \varphi_0(x)$$

$$= \varphi_{q-2} \cdots \partial_j \varphi_j \varphi_{j-1} \cdots \varphi_0(x) = \varphi_{q-2} \cdots \varphi_{j+1} 1_{q-1} = 1_{q-1}.$$

De las dos propiedades demostradas se sigue que φ es un homomorfismo de Γ_q sobre N_q. Por otro lado, si $s_j(x) \in D_q(\Gamma)$, tenemos que

$$\varphi(s_j x) = \varphi_{q-1} \cdots \varphi_j \cdots \varphi_0 s_j(x) = \varphi_{q-1} \cdots \varphi_j s_j \cdots \varphi_0(x) = 1_q,$$

es decir $D_q(\Gamma)$ Ker φ.

Inversamente, supongamos que $\varphi(x) = 1_q$. Entonces

$$1_q = \varphi_{q-1} \cdots \varphi_0(x) = \varphi_{q-2} \cdots \varphi_0(x)(s_{q-1} \partial_{q-1} \varphi_{q-2} \cdots \varphi_0 x^{-1}),$$

de donde

$$\varphi_{q-2} \cdots \varphi_0(x) = s_{q-1} \partial_{q-1} \varphi_{q-1} \cdots \varphi_0(x),$$

es decir,

$$\varphi_{q-2} \cdots \varphi_0(x) \equiv 1 \mod \operatorname{Im} s_{q-1}.$$

Continuando este proceso se llega a

$$x \equiv 1 \mod (\operatorname{Im} s_{q-1} + \operatorname{Im} s_{q-2} + \cdots + \operatorname{Im} s_0),$$

es decir, $x \in D_q(\Gamma)$, con lo cual queda demostrada la proposición.

Sean $N(\Gamma) = \sum N_q(\Gamma)$, $D(\Gamma) = D_q(\Gamma)$, subcomplejos de Γ (es decir cerrados bajo ∂).

PROPOSICION 2. <u>La composición</u>

$$N(\Gamma) \xrightarrow{i} \Gamma \xrightarrow{\eta} \Gamma/D(\Gamma)$$

<u>donde i es la inclusión y η el homomorfismo canónico induce un isomorfismo de complejo</u> (con respecto a ∂)

$$N(\Gamma) \cong \Gamma/D(\Gamma).$$

Esto se sigue de la proposición 1 y de la definición del isomorfismo.

PROPOSICION 3. <u>El homomorfismo inducido en homología por la inclusión de $N(\Gamma)$ en Γ es un isomorfismo</u>:

$$H(N(\Gamma)) \cong H(\Gamma).$$

En el diagrama $N(\Gamma) \xrightarrow{i} \Gamma \longrightarrow N(\Gamma)$, la composición φi es la identidad por lo tanto la i en homología es monomorfismo. Sea ahora x un representante de un elemento de $H(\Gamma)$. Entonces $\partial x = \prod_{i=0}^{q}(\partial_i x)^{\varepsilon(i)} = 1$. Demostraremos que en Γ, x es homólogo a $\varphi(x)$, lo cual prueba la proposición. En efecto,

$$\partial(s_0 x) = \prod_{i=0}^{q+1} \partial_i(s_0 x)^{\varepsilon(i)} = \prod_{i=2}^{q+1} s_0 \partial_{i-1} x^{\varepsilon(i)} =$$

$$= s_0 \prod_{i=1}^{q} \partial_i x^{\varepsilon(i+1)} = s_0 \partial_0 x = x^{-1}(x s_0 \partial_0 x) = x^{-1} \varphi_0(x),$$

es decir, x es homóloga a $\varphi_o(x)$ en Γ.

Sea $y = \varphi_{j-1}\varphi_{j-2}\cdots\varphi_o(x)$. Supongamos como hipótesis de inducción que x es homólogo a y. Entonces tenemos $\partial y = 1_{q-1}$, $\partial_k y = 1_{q-1} (k = 0, \ldots, j-1)$. Formemos

$$\partial(s_j y) = \prod_{i=0}^{q+1} (\partial_i s_j y)^{\mathcal{E}(i)} = \prod_{i=0}^{j-1} (s_{j-1}\partial_i y)^{\mathcal{E}(i)} \prod_{i=j+2}^{q+1} s_j \partial_{i-1} y^{\mathcal{E}(i)}$$

$$= s_j \prod_{i=j+1}^{q} (\partial_i y^{\mathcal{E}(i)})^{-1} = s_j \prod_{i=0}^{j} \partial_i y^{\mathcal{E}(i)} = s_j \partial_j y^{\mathcal{E}(j)} =$$

$$= [y^{-1}\, y(s_j \quad {}_j y^{-1})]^{\mathcal{E}(j+1)} = [y^{-1}\varphi_j(y)]^{\mathcal{E}(j+1)},$$

de donde y es homólogo a $\varphi_j(y) = \varphi_j\varphi_{j-1}\cdots\varphi_o(x)$, es decir, x es homólogo a $\varphi(x)$, q.e.d.

Sea Δ_q el complejo semisimplicial llamado <u>q-simplejo standard</u> (ver [4], 1A) y

$$C(\Delta_q)_N = C(\Delta_q)/D(C(\Delta_q)).$$

Para $i=0,\ldots,q+1$ se define $\mathcal{E}_i : \{0,\ldots,q\} \longrightarrow \{0,\ldots,q+1\}$

$$\mathcal{E}_i(j) = j, \qquad j < i$$

$$\mathcal{E}_i(j) = j+1, \qquad j \geqslant i.$$

Análogamente para $i=0,\ldots,q$ se define $\eta_i : \{0,\ldots,q\} \longrightarrow \{0,\ldots,q+1\}$

$$\eta_i(j) = j, \qquad j \leqslant i$$

$$\eta_i(j) = j-1, \qquad j > i.$$

Designaremos también con ε_i, η_i las transformaciones semi simpliciales determinadas por ε_i, η_i en Δ_q, Δ_{q+1}.

<u>Definición</u>: Si A es un complejo de cadenas, $K(A)$ es el complejo semisimplicial definido como sigue:

1) $K(A)_q$ es el conjunto de homomorfismos de cadena

$$f : C(\Delta_q)_N \longrightarrow A.$$

2) Si $f \in K(A)_q$, $\partial_i f = f\varepsilon_i \in K(A)_{q-1}$, $s_i f = f\eta_i \in K(A)_{q+1}$.

Si $A_q = 0$ para $q \neq n$ y $A_n = \pi$, entonces definimos

$$K(\pi, n) = K(A).$$

Sea $f \in N(K(A))$, es decir, $f : C(\Delta_q)_N \longrightarrow A$, homomorfismo de cadena tal que $\partial_i f = 0$ para $i = 0,\ldots,q-1$. Definimos $\lambda : N(K(A)) \longrightarrow A$ con la fórmula

$$\lambda(f) = f((0,\ldots,q)).$$

LEMA 1. <u>λ es un isomorfismo de cadena</u>:

$$\lambda : N(K(A)) \xrightarrow{\cong} A.$$

Tenemos que

$$\partial\lambda f = \partial f((0,\ldots,q)) = f\sum(-1)^i \varepsilon_i(0,\ldots,q) =$$

$$\sum(-1)^i \partial_i f((0,\ldots,q)) = \sum(-1)^i \lambda\partial_i f = \lambda\partial f.$$

Supongamos ahora que $\lambda(f) = 0$. Entonces como para $i = 0,\ldots,q-1$, $\partial_i f = 0$, se tiene

$$0 = \partial f((0,\dots,q)) = f\partial(0,\dots,q) = f\sum(-1)^i \varepsilon_i(0,\dots,q) =$$
$$\sum(-1)^i \partial_i f((0,\dots,q)) = \partial_q f((0,\dots,q)) = f((0,\dots,q-1)).$$

Además todos los simplejos $(m_0,\dots,m_r)$ de dimensión $r < q-1$, distintos de $(0,\dots,q-1)$, se pueden escribir en la forma

$$(m_0,\dots,m_r) = \varepsilon_i(k_0,\dots,k_r),\ 0 \leq i \leq q-1.$$

Entonces en estos casos

$$f(m_0,\dots,m_r) = f\,\varepsilon_i(k_0,\dots,k_r) = \partial_i f(k_0,\dots,k_r) = 0,$$

es decir, f se anula en todos los simplejos de Δ_q.

Además λ es epimorfismo ya que si $a \in A_q$, definiendo $f_a : C(\Delta_q)_N \longrightarrow A$ con

$$f_a((0,\dots,q)) = a,$$

$$f_a((0,\dots,q-1)) = (-1)^{q-1}\partial a,$$

$$f_a = 0 \quad \text{en los demás simplejos,}$$

el homomorfismo asociado es evidentemente de cadena y

$$\lambda f_a = a.$$

LEMA 2. <u>Sean Λ y Γ dos complejos abelianos de grupo y $f : \Lambda \longrightarrow \Gamma$ un homomorfismo tal que el inducido $f : N(\Lambda) \longrightarrow N(\Gamma)$ sea isomorfismo. Entonces $f: \Lambda \longrightarrow \Gamma$ es también isomorfismo.</u>

En dimensión cero, el lema es trivial ya que $\Lambda_0 = N_0(\Lambda)$, $\Gamma_0 = N_0(\Gamma)$. Supongamos que para dimensiones menores que q es monomorfismo y sea $x \in \Lambda_q$ tal que $f(x) = 0$. Entonces $f(\partial_i x) = \partial_i f(x) = 0$, $(i = 0,\ldots,q)$ por lo tanto, $\partial_i x = 0$, de donde $x \in N_q(\Lambda)$; por consiguiente $x = 0$.

Supongamos ahora que es epimorfismo para dimensiones menores que q y sea $x \in \Gamma_q$. Escribimos

$$x = \varphi(x) + (x - \varphi(x)).$$

$\varphi(x) \in N_q(\Gamma)$, $(x - \varphi(x)) \in D_q(\Gamma)$ por lo tanto, $\varphi(x) = f(y)$ con $y \in N_q(\Lambda)$, $x - \varphi(x) = \sum s_i x_i$ con $x_i \in \Gamma_{q-1}$. Por lo tanto $x_i = f(y_i)$ con $y_i \in \Lambda_{q-1}$, entonces $x - \varphi(x) = \sum f(s_i y_i) = f(z)$ con $z \in \Lambda_q$, q.e.d.

Sea ahora Γ un complejo abeliano de grupos y $x \in \Gamma_q$. Sea $\xi_x : C(\Delta_q) \longrightarrow \Gamma$ el homomorfismo semisimplicial determinado por

$$\xi_x((0,\ldots,q)) = x.$$

Este induce un homomorfismo de cadenas

$$\xi_x : C(\Delta_q)_N \longrightarrow N(\Gamma).$$

PROPOSICION 4. <u>El homomorfismo</u> $\xi : \Gamma \longrightarrow K(N(\Gamma))$ <u>definido por</u> $\xi(x) = \xi_x$ <u>es un isomorfismo de complejos de grupo.</u>

Probaremos primero que ξ_x es semisimplicial:

En efecto,

$$\partial_i \xi(x) = \partial_i \xi_x = \xi_x \varepsilon_i, \qquad \xi \partial_i(x) = \xi_{\partial_i x}$$

y como

$$\xi_x \varepsilon_i(0,\ldots,q-1) = \xi_x(0,\ldots,\hat{i},\ldots,q-1) = \partial_i x$$

$$\xi_{\partial_i x}(0,\ldots,q-1) = \partial_i x,$$

obtenemos $\partial_i \xi = \xi \partial_i$. Análogamente se demuestra para s_i.

Consideremos el diagrama

$$N(\Gamma) \xrightarrow{\bar{\xi}} N(K(N(\Gamma)) \xrightarrow{\lambda} N(\Gamma)$$

donde $\bar{\xi} = \xi \mid N(\Gamma)$ y λ es el isomorfismo del lema 1.
La composición $\lambda\bar{\xi}$ es la identidad ya que

$$\lambda\bar{\xi}(x) = \lambda(\xi_x) = \xi_x(0,\ldots,q) = x.$$

Por lo tanto $\bar{\xi}$ es isomorfismo, de donde, por el lema 2 ξ es también isomorfismo.

Sea $\mathcal{A}$ la categoría de complejos abelianos de grupos y homomorfismos semisimpliciales y sea $\mathcal{C}$ la categoría de complejos de cadena y transformaciones de cadena. Sea $K : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A}$ el functor definido por las fórmulas

$$K : C \longrightarrow K(C) \qquad (C \in \mathcal{C})$$

y si $f : C_1 \longrightarrow C_2$ es de cadena, definimos

$K(f) : K(C_1) \longrightarrow K(C_2)$, $K(f) \in \mathcal{A}$ con el diagrama

$$\begin{array}{ccc} K(C_1)_q & = & Z_o(\mathrm{Hom}\ (C(\Delta_q)_N, C_1)) \\ {\scriptstyle K(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_\#} \\ K(C_2)_q & = & Z_o(\mathrm{Hom}\ (C(\Delta_q)_N, C_2)). \end{array}$$

Sea $N : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$ el functor definido por las fórmulas

$$N : A \longrightarrow N(A) \cong A_N, \quad (A \in \mathcal{A})$$

y si $f : A_1 \longrightarrow A_2$ entonces $N(f) : N(A_1) \longrightarrow N(A_2)$ está dado por $N(f) = f|N(A_1)$.

TEOREMA 3. <u>Los functores</u>

$$K : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A}, \qquad N : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$$

<u>son inversos y establecen un isomorfismo entre las categorías</u> $\mathcal{A}$ <u>y</u> $\mathcal{C}$.

El lema 1 y la proposición 4 establecen el isomorfismo entre los objetos de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$. Nos resta verificar el isomorfismo entre las funciones, o sea la conmutatividad en los siguientes diagramas

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{\quad f \quad} & A_2 \\ {\scriptstyle \xi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \xi} \\ K(N(A_1)) & \xrightarrow{K(N(f))} & K(N(A_2)) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} C_1 & \xrightarrow{g} & C_2 \\ \downarrow{\lambda} & & \downarrow{\lambda} \\ N(K(C_o)) & \xrightarrow{N(K(g))} & N(K(C_2)) \end{array}$$

puesto que ξ, λ son isomorfismos. Sea $x \in A_1$; tenemos

$\xi f(x)(0,\ldots,q) = \xi_{f(x)}(0,\ldots,q) = [f(x)] \in (A_2)_N$

$K(N(f))\xi(x)(0,\ldots,q) = N(f)(x) = [f(x)]$.

Sea ahora $u \in N(K(C_1))$;

$(g\lambda)u = g(u(0,\ldots,q))$.

$(\lambda N(K(g)))u = N(K(g))(u(0,\ldots,q)) = gu(0,\ldots,q)$.

Sean X, Y dos complejos semisimpliciales. Designaremos con $\mathfrak{M}(X,Y)$ el conjunto de transformaciones s.s. de X en Y. Si $Y = \Gamma$ es un complejo abeliano de grupos, $\mathfrak{M}(X,Y)$ tiene estructura de grupo inducida por la operación en Γ y si X también es complejo abeliano de grupos, las transformaciones serán homomorfismos s.s.

TEOREMA 4. <u>Si X es un c.s.s. y Γ un complejo abeliano de grupos, entonces</u>

$$\mathfrak{M}(X,\Gamma) \cong Z_o(\mathrm{Hom}(C(X)_N, \Gamma_N)).$$

Si $f \in \mathfrak{M}(X,\Gamma)$, f determina $\bar{f} \in \mathfrak{M}(C(X),\Gamma)$. Esta correspondencia $f \longrightarrow \bar{f}$ es biunívoca; por el teorema 3

$$\mathfrak{M}(X,\Gamma)) = Z_o(\mathrm{Hom}\ (C(X)_N, \Gamma_N),\ \text{q.e.d.}$$

Sean X, Y dos complejos semisimpliciales y $X \times Y$ el producto cartesiano semisimplicial (ver [4] , Cap. 1)

LEMA 3. Las funciones $f : C(X \times Y) \longrightarrow C(X) \otimes C(Y)$,

$$f(x,y) = \sum_{i=0}^{q} (\tilde{\partial})^i x \otimes (\partial_o)^{q-i} y$$

donde $\tilde{\partial} z = \partial_{\dim z} z$ y $\nabla : C(X) \otimes C(Y) \longrightarrow C(X \times Y)$,

$$\nabla (x_p \otimes y_q) = \sum_{(\mu,\nu)} (s_\nu x_p, s_\mu y_q)$$

donde (μ, ν) es una (p,q) barajada, son transformaciones de cadena e inducen una equivalencia de cadena. Además $f \nabla = \text{ident.}$

Para la demostración (ver [4], pág. 60).

TEOREMA 5. El functor $N : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$ induce un isomorfismo natural

$$\chi : \pi (X, \Gamma) \longrightarrow H_o(\mathrm{Hom}\ (C(X)_N, \Gamma_N).$$

Demostremos primero que χ está bien definida. Sean $g_o, g_1 : X \longrightarrow \Gamma$ dos transformaciones s.s. $(I = \Delta_1)$ homotópicas y $G : I \times X \longrightarrow \Gamma$ la homotopía. Sean $\eta_i : X \longrightarrow I \times X$ las inclusiones $\eta_i(x) = (s_i^q(i), x)$, $(i = 0, 1)$. Entonces $G\,\eta_i = g_i$. Considerando el diagrama

$$C(I)_N \otimes C(X)_N \longrightarrow C(I \times X)_N \xrightarrow{N(G)} \Gamma_N$$

inducido por G, definimos $g : C(X)_N \longrightarrow \Gamma_N$ de grado 1 por la fórmula

$$g(a) = N(G)\nabla((0,1)\otimes a).$$

Por la igualdad

$$\nabla((j)\otimes a) = (s_j^q(j),a) = N(\eta_j)a$$

se tiene que

$$N(G)\nabla((j)\otimes a) = N(G)N(\eta_j)(a) = N(G\eta_j)(a) = N(g_j)(a),$$

de donde

$$(dg)a = d(ga)+g(da) = d(N(G)\nabla((0,1)\otimes a))+N(G)\nabla((0,1)\otimes da)$$

$$= N(G)\nabla((1)\otimes a)-N(G)\nabla((0)\otimes a) = N(g_1)(a)-N(g_o)(a),$$

lo cual demuestra que χ transforma funciones homotópicas en ciclos homólogos.

Como χ es evidentemente epimorfismo, bastará demostrar que es monomorfismo. Sea $h : X \longrightarrow \Gamma$ tal que $N(h) = dg$. Se construye con $g : C(X)_N \longrightarrow \Gamma_N$,

$$\tilde{g} : C(I)_N \otimes C(X)_N \longrightarrow \Gamma_N,$$

transformación de cadena dada por

$$\tilde{g}(0\otimes a) = 0,$$

$$g(1\otimes a) = (dg)a,$$

$$g((0,1)\otimes a) = g(a).$$

Sea $G = \tilde{g}f$ en el diagrama

$$C(IX)_N \xrightarrow{f} C(I)_N \otimes C(X)_N \xrightarrow{\tilde{g}} \Gamma_N$$

Entonces $\lambda K(G)\lambda^{-1}: I \times X \longrightarrow \Gamma$, y haciendo $(s_j^q(j),a)=z_j$,

y $\mu_{z_j}(0,\dots,q) = z_j$, tenemos

$$\lambda K(G)\lambda^{-1}z_j = \lambda K(G)\,\mu_{z_j} = \lambda\tilde{g}f\,\mu_{z_j} = \tilde{g}fz_j =$$

$$= \tilde{g}f(s_j^q(j),a) = \tilde{g}(\sum(\tilde{\partial})^i(j)\otimes(\partial_0)^{q-i}a) =$$

$$= \tilde{g}((j),a) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j = 0 \\ dg(a) = N(h)(a) & \text{si} \quad j = 1. \end{cases}$$

3. Fórmulas de Künneth y de los coeficientes universales

Sea Λ un anillo conmutativo con unidad y P un Λ-módulo. P se llama proyectivo si todo diagrama de Λ-módulos del tipo

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r] & A'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

en el cual el renglón es exacto, puede completarse en el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r] & A'' \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Por ejemplo, si P es un módulo libre, P es proyectivo.

PROPOSICION 5. <u>Sean A y C dos Λ-módulos graduados diferenciales. Entonces si</u>

1) <u>A es proyectivo con graduación no negativa y</u>

2) $H(C) = 0$

<u>se tiene que</u>

$$H(\mathrm{Hom}_\Lambda(A,C)) = 0.$$

<u>Demostración</u>. Sea $f \in Z_k(\mathrm{Hom}_\Lambda(A,C)$; entonces f satisface la igualdad $d(f(a)) = (-1)^k f(da)$. Tenemos

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[d] & {} \arrow[d] \\
A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d] & C_{k+1} \arrow[d] \\
A_o \arrow[r, "f_o"] & C_k \arrow[d] \\
& C_{k-1}
\end{tikzcd}$$

y la igualdad mencionada significa que $d(f_i(a)) = (-1)^k f_{i-1}(da)$ con $a \in A_i$. En particular, para $i = 0$ tenemos $d(f_o(a)) = 0$, o sea, $f_1(A_o) \subset Z_k(C) = \mathrm{Im}\,(d: C_{k+1} \longrightarrow C_k)$. Tenemos así un diagrama

$$\begin{tikzcd}
& A_o \arrow[d, "f_o"] & \\
C_{k+1} \arrow[r, "d"] & Z_k(C) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

y por la proyectividad de A_o, existe $s_o: A_o \longrightarrow C_{k+1}$ tal que $ds_o = f_o$. Supongamos pues definida $s_j: A_j \longrightarrow C_{k+j+1}$ para $j < n$, tal que

$$ds_j + (-1)^k s_{j-1} d = f_j.$$

Consideremos

$$\alpha = f_n + (-1)^{k+1} s_{n-1} d : A_n \longrightarrow C_{k+n}.$$

Tenemos que $\alpha(a)$ es un ciclo para toda $a \in A_n$, ya que

$$
\begin{aligned}
d(\alpha(a)) &= d(f_n+(-1)^{k+1} s_{n-1}d)(a) \\
&= ((-1)^k f_{n-1}d+(-1)^{k+1} ds_{n-1}d)(a) \\
&= \left[(-1)^k f_{n-1}d(a)+(-1)^{k+1}(f_{n-1}+(-1)^{k+1}s_{n-2}d)\right](da) \\
&= \left[(-1)^k f_{n-1}d+(-1)^{k+1}f_{n-1}d\right](a) = 0
\end{aligned}
$$

Luego

$$\alpha(A_n) \subset Z_{n+k}(C) = I_m(d:C_{n+k+1} \longrightarrow C_{n+k}).$$

Tenemos pues

$$
\begin{tikzcd}
 & A_n \arrow[d, "\alpha"] & \\
C_{n+k+1} \arrow[r, "d"] & C_{n+k} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

y por ser A_n proyectivo, existe $s_n : A_n \longrightarrow C_{n+k+1}$, tal que $ds_n = \alpha$, o sea

$$ds_n + (-1)^k s_{n-1}d = f_n.$$

Hemos pues definido $s = \{s_n\}$ $\mathrm{Hom}_\Lambda(A,C)_{k+1}$, tal que $(ds) = f$. O sea, f es frontera, q.e.d.

Sea

$$0 \longrightarrow C' \longrightarrow C \longrightarrow C'' \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta de Λ-módulos diferenciales graduados.

Si A es un Λ-módulo diferencial graduado tenemos que

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Lambda}(A,C') \xrightarrow{i} \mathrm{Hom}_{\Lambda}(A,C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Lambda}(A,C'')$$

es una sucesión exacta de grupos diferenciales graduados.

Si suponemos además que A es proyectivo, tenemos

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Lambda}(A,C') \xrightarrow{i} \mathrm{Hom}_{\Lambda}(A,C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Lambda}(A,C'') \longrightarrow 0$$

y correspondiente a esta sucesión exacta, de la manera usual obtenemos el triángulo exacto:

$$\begin{tikzcd}
H(\mathrm{Hom}_{\Lambda}(A,C') \arrow[rr, "i"] & & H(\mathrm{Hom}_{\Lambda}(A_1C)) \arrow[dl, "j"] \\
& H(\mathrm{Hom}_{\Lambda}(A,C'')) \arrow[ul, "d_{\#}"] &
\end{tikzcd}$$

donde i,j son homomorfismos de grado 0, y $d_{\#}$ es de grado 1.

Recordemos que un anillo Λ se llama <u>hereditario</u> si tiene la siguiente condición:

Si A es un Λ-módulo proyectivo y B es un Λ-submódulo de A entonces, B es proyectivo.

Recordemos también la resolución proyectiva de un módulo diferencial graduado sobre un anillo hereditario Λ:
Sea C un Λ-módulo diferencial graduado y consideremos la sucesión exacta:

Si A es un Λ-módulo diferencial graduado tenemos que

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Lambda}(A,C') \xrightarrow{i} \mathrm{Hom}_{\Lambda}(A,C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Lambda}(A,C'')$$

es una sucesión exacta de grupos diferenciales graduados.

Si suponemos además que A es proyectivo, tenemos

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Lambda}(A,C') \xrightarrow{i} \mathrm{Hom}_{\Lambda}(A,C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Lambda}(A,C'') \longrightarrow 0$$

y correspondiente a esta sucesión exacta, de la manera usual obtenemos el triángulo exacto:

$$\begin{tikzcd} H(\mathrm{Hom}_{\Lambda}(A,C') \arrow[rr, "i"] & & H(\mathrm{Hom}_{\Lambda}(A_1C)) \arrow[dl, "j"] \\ & H(\mathrm{Hom}_{\Lambda}(A,C'')) \arrow[ul, "d_{\#}"] & \end{tikzcd}$$

donde i,j son homomorfismos de grado 0, y $d_{\#}$ es de grado 1.

Recordemos que un anillo Λ se llama <u>hereditario</u> si tiene la siguiente condición:

Si A es un Λ-módulo proyectivo y B es un Λ-submódulo de A entonces, B es proyectivo.

Recordemos también la resolución proyectiva de un módulo diferencial graduado sobre un anillo hereditario Λ: Sea C un Λ-módulo diferencial graduado y consideremos la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow B(C) \xrightarrow{i} Z(C) \xrightarrow{j} H(C) \longrightarrow 0,$$

donde $B(C)$, $Z(C)$ y $H(C)$ son respectivamente los grupos de fronteras, ciclos y de homología. Sabemos que para un anillo Λ cualquiera, todo Λ-módulo A es el cociente de un Λ-módulo proyectivo. Consideremos pues $B(C)$,

$$0 \longleftarrow B(C) \longleftarrow P'_0 \longleftarrow P'_1 \longleftarrow 0$$

donde P'_0 es proyectivo. Si Λ es hereditario, P'_1 también es proyectivo, y obtenemos así una resolución proyectiva de $B(C)$, es decir una sucesión exacta en la que los términos a excepción de $B(C)$ son proyectivos.

Análogamente para $H(C)$, consideremos la sucesión

$$0 \longleftarrow H(C) \longleftarrow P''_0 \longleftarrow P''_1 \longleftarrow 0,$$

y el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & P'_1 \arrow[r] \arrow[d] & P'_1+P''_1 \arrow[r] \arrow[d] & P''_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P'_0 \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "p'_0"] & P'_0+P''_0 \arrow[r, "j_0"] \arrow[d, "p_0"] & P''_0 \arrow[r] \arrow[d, "p''_0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B(C) \arrow[r, "i"] \arrow[d] & Z(C) \arrow[r, "j"] & H(C) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Queremos definir un epimorfismo $p_o : P_o' + P_o'' \longrightarrow Z(C)$ que haga el diagrama conmutativo. En P_o' el homomorfismo está definido por $ip_o' : P_o' \longrightarrow Z(C)$. Ya que P_o'' es proyectivo, existe un homomorfismo $\beta : P_o'' \longrightarrow Z(C)$ tal que $j\beta = p_o''$. Esto pues nos permite definir el epimorfismo p_o.

Consideremos ahora la sucesión

$$0 \longrightarrow Z(C) \longrightarrow C \longrightarrow Z(C) \longrightarrow 0$$

donde $Z'(C) \xrightarrow{d} B(C)$. Sea $(P_o')^+$ el módulo graduado obtenido de P_o en la forma $(P_o)^+_{q+1} = (P_o')_q$. Utilizando ahora las resoluciones de $Z(C)$ y $B(C)$ tenemos, de una manera análoga:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & P_1+P_1 \arrow[r] \arrow[d] & (P_1+P_1)+(P_1)^+ \arrow[r] \arrow[d] & (P_1)^+ \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_1+P_o \arrow[r] \arrow[d] & (P_o+P_o)+(P_o)^+ \arrow[r] \arrow[d] & (P_o)^+ \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z(C) \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & Z(C) \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Designemos por $P(C) = P_o(C) + P_1(C)$, la resolución proyectiva de C, donde $P_0(C) = (P_0'+P_0'') + (P_0')^+$, $P_1(C) = (P_1'+P_2'') + (P_1')^+$. Entonces $P(C)$ es un complejo doble, con diferenciales $d' : P_1(C) \longrightarrow P_0(C)$, diferencial externa, y $d'' : P_i(C) \longrightarrow P_i(C)$, $i = 0, 1$, diferencial externa, de tal manera que se tiene

$$H_{d'}(C) = C, \quad H(P(C)) \xrightarrow{\cong} H(C).$$

Además puede observarse fácilmente que los ciclos de $P(C)$ con respecto a la diferencial interna, forman una resolución proyectiva sobre los ciclos de C, las fronteras sobre las fronteras de C y la homología sobre la homología de C. Ahora, ya que $P(C) \longrightarrow C$ es sobre y $H(P(C)) \xrightarrow{\cong} H(C)$, tenemos, de

$$0 \longrightarrow \widetilde{P}(C) \longrightarrow P(C) \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

$$\text{(I)} \qquad H(\operatorname{Hom}_\Lambda(A,P)) \xrightarrow[\cong]{} H(\operatorname{Hom}_\Lambda(A,C))$$

para un Λ-módulo diferencial graduado y proyectivo A.

TEOREMA 6. *Si Λ es hereditario y A proyectivo, entonces se tiene un isomorfismo*

$$H(\operatorname{Hom}_\Lambda(A,C)) \longrightarrow H(\operatorname{Hom}_\Lambda(A,H(C))$$

Demostración. Consideremos $P(C)$, resolución proyectiva ordinaria de C. Tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Z(P) \longrightarrow P \xrightarrow{d} Z'(P) \longrightarrow 0,$$

donde $d : Z'(P) \longrightarrow B(P)$ es un isomorfismo; luego $Z'(P)$ es proyectivo. Entonces existe una transformación $\gamma : Z'(P) \longrightarrow P$ tal que $d\gamma =$ ident., o sea que $P \cong Z(P)+Z'(P)$, lo que induce claramente una equivalencia de cadena $P \longrightarrow H(P)$, donde $H(P)$ tiene diferencial nula. Luego $0 \longrightarrow P^{\#} \longrightarrow P \longrightarrow H(P) \longrightarrow 0$ induce un isomorfismo $H(\mathrm{Hom}_{\Lambda}(A,P)) \cong$ $= H(\mathrm{Hom}_{\Lambda}(A,H(P))$. Utilizando (I) obtenemos la proposición.

<u>Nota</u>. Obsérvese que el isomorfismo no es natural.

TEOREMA 7. <u>Si $\Lambda = K$ es un campo, el isomorfismo de la proposición anterior es natural</u>.

<u>Demostración</u>. Considérese

$$0 \longrightarrow Z(C) \xrightarrow{i} C \xrightarrow{j} Z'(C) \longrightarrow 0$$

Puesto que $Z'(C)$ es un espacio vectorial, existe $u : Z'(C) \longrightarrow C$ tal que $ju =$ ident. : $Z'(C) \longrightarrow Z'(C)$. Consideremos u_1, u_2 dos homomorfismos tales que $ju_i =$ ident. Tenemos así

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Z(C) \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r, shift left, "j"] \arrow[dr, shift left, "j"] & Z(C) \arrow[l, shift left, "u_1"] \arrow[d, equal] \\ & H(C) & & Z(C). \arrow[ul, shift left, "u_2"] \end{tikzcd}$$

Sea $c \in C$, entonces

$$c \longrightarrow c - u_1 j(c) \in Z(C),$$

$$c \longrightarrow c - u_2 j(c) \in Z(C).$$

Luego $\pi((u_1-u_2)J(c)) = f : C \longrightarrow H(C)$ es tal que $f(Z(C))=0$, luego $f_0 = 0$, y definimos $g \in \mathrm{Hom}(C; H(C))$, tal que $g(dc) = f(c)$; extendemos g a C (sabiendo que $B(C)$ es sumando directo de C). Entonces $(dg) = f$, o sea u_1, u_2 inducen el mismo homomorfismo $H(C) \longrightarrow H(C)$, q. e. d.

Sea Λ un anillo y A, C dos Λ-módulos graduados diferenciales.

TEOREMA 8. <u>Si Λ es hereditario y A es proyectivo, entonces existe una sucesión exacta</u>

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_\Lambda(H(A), H(C)) \longrightarrow H(\mathrm{Hom}_\Lambda(A,C)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(H(A),H(C)) \longrightarrow 0$$

<u>Demostración</u>: Consideremos las sucesiones exactas

(1) $$0 \longrightarrow Z(A) \longrightarrow A \longrightarrow Z'(A) \longrightarrow 0,$$

(2) $$0 \longrightarrow B(A) \longrightarrow Z(A) \longrightarrow H(A) \longrightarrow 0,$$

siendo además la diferencial d un isomorfismo

(3) $$d : Z'(A) \longrightarrow B(A).$$

Por ser A proyectivo, $B(A) \subset A$ y Λ hereditario este último isomorfismo implica que $Z'(A)$ es también proyectivo y por lo tanto la sucesión (1) se descompone (splits), de donde la sucesión

$$c \longrightarrow c - u_2 j(c) \in Z(C).$$

Luego $\pi((u_1-u_2)J(c)) = f : C \longrightarrow H(C)$ es tal que $f(Z(C))=0$, luego $f_0 = 0$, y definimos $g \in \mathrm{Hom}(C; H(C))$, tal que $g(dc) = f(c)$; extendemos g a C (sabiendo que $B(C)$ es sumando directo de C). Entonces $(dg) = f$, o sea u_1, u_2 inducen el mismo homomorfismo $H(C) \longrightarrow H(C)$, q. e. d.

Sea Λ un anillo y A, C dos Λ-módulos graduados diferenciales.

TEOREMA 8. <u>Si Λ es hereditario y A es proyectivo, entonces existe una sucesión exacta</u>

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_\Lambda(H(A), H(C)) \longrightarrow H(\mathrm{Hom}_\Lambda(A,C)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(H(A),H(C)) \longrightarrow 0$$

<u>Demostración</u>: Consideremos las sucesiones exactas

(1) $$0 \longrightarrow Z(A) \longrightarrow A \longrightarrow Z'(A) \longrightarrow 0,$$

(2) $$0 \longrightarrow B(A) \longrightarrow Z(A) \longrightarrow H(A) \longrightarrow 0,$$

siendo además la diferencial d un isomorfismo

(3) $$d : Z'(A) \longrightarrow B(A).$$

Por ser A proyectivo, $B(A) \subset A$ y Λ hereditario este último isomorfismo implica que $Z'(A)$ es también proyectivo y por lo tanto la sucesión (1) se descompone (splits), de donde la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(Z'(A),H(C)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(A,H(C)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(Z(A),H(C)) \longrightarrow 0$$

es exacta. De esta última obtenemos, tomando en cuenta que en el segundo y cuarto grupo $d = 0$, el triángulo exacto

$$(4) \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_\Lambda(Z'(A),H(C)) \arrow[rr, "\alpha"] & & H(\mathrm{Hom}_\Lambda(A,H(C)) \arrow[dl, "\beta"] \\ & \mathrm{Hom}_\Lambda(Z(A),H(C)). \arrow[ul, "\gamma"] & \end{tikzcd}$$

De la sucesión (2) obtenemos la sucesión exacta

$$(5) \qquad 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(H(A),H(C)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(Z(A),H(C)) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(B(A),H(C)) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_\Lambda(H(A),H(C)) \longrightarrow 0.$$

De (3) tenemos

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(Z'(A),H(C)) = \mathrm{Hom}_\Lambda(B(A),H(C)),$$

de donde

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(H(A),H(C)) = \mathrm{Hom}_\Lambda(Z'(A),H(C))/\mathrm{Im}\,\gamma,$$

y por consiguiente α es monomorfismo.

Del triángulo exacto (4) resulta que $\mathrm{Im}\,\alpha = \mathrm{Ker}\,\beta$

Finalmente, sea $f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(A,H(C))$. Por la definición

$$df = fd : A \xrightarrow{d} A \xrightarrow{f} H(C) .$$

df induce (ya que $df(Z(A)) = 0$) un homomorfismo

$$f : Z'(A) = A/Z(A) \longrightarrow H(C),$$

de donde $\gamma f = f'$. Demostraremos ahora que

$$\mathrm{Ker}\,\gamma = \mathrm{Hom}_\Lambda(H(A),H(C)).$$

Supongamos $f \in \mathrm{Ker}\,\gamma$, es decir $fd = 0$. Por lo tanto, $f(B(A)) = 0$, de donde f induce un homomorfismo de $H(A)$ en $H(C)$ es decir, $\mathrm{Ker}\,\gamma \subset \mathrm{Hom}_\Lambda(H(A),H(C))$. Supongamos ahora $g \in \mathrm{Hom}_\Lambda(H(A), H(C))$ y sea f la composición $Z(A) \longrightarrow H(A) \xrightarrow{g} H(C)$. Tenemos $f(B(A)) = 0$ y $\gamma f = 0$, de donde $\mathrm{Ker}\,\gamma \supset \mathrm{Hom}_\Lambda(H(A),H(C))$. Así pues $\mathrm{Hom}_\Lambda(H(A),H(C)) = \mathrm{Ker}\,\gamma = \mathrm{Im}\,\beta$, q. e. d.

OBSERVACION. Hemos definido

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(H(A), H(C)) = \sum_k \mathrm{Hom}_\Lambda(H(A), H(C))_k ,$$

y como si $f \in \mathrm{Hom}\,(H(A),H(C))$, $f = \{f_n : H_n(A) \longrightarrow H_{n+k}(C)\}$ esto nos define una correspondencia biunívoca

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(H(A),H(C))_k \longrightarrow \prod_n \mathrm{Hom}_\Lambda(H_n(A),H_{n+k}(C)),$$

se tiene que

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(H(A),H(C)) = \sum_k \prod_n \mathrm{Hom}_\Lambda(H_n(A), H_{n+k}(C)).$$

De aquí, tomando en cuenta las sucesiones del teorema 8 y la (4) obtenemos fácilmente que

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(H(A),H(C)) = \sum_k \prod_n \mathrm{Ext}^1_\Lambda(H_n(A),H_{n+k}(C)).$$

DEFINICION. Sea Λ un anillo y A un Λ-módulo graduado diferencial. Definimos un nuevo Λ-módulo graduado diferencial sA, llamado la suspensión de A, en la forma siguiente:

$$(sA)_{q+1} = A_q$$

y cuando un elemento $x \in A_q$ lo consideremos como elemento de $(sA)_{q+1}$ lo designaremos con x^+. Definimos

$$d(x^+) = (dx)^+.$$

Definamos también el homomorfismo de suspensión

$$s : A \longrightarrow sA$$

con la fórmula

$$s(x) = (-1)^q x^+ \quad \text{si} \quad x \in A_q.$$

Se define la suspensión iterada $s^k A$ como

$$s^0 A = A, \quad s^k A = s(s^{k-1} A),$$

y el homomorfismo

$$s^k : A \longrightarrow s^k A$$

en la forma natural. Evidentemente $s^k(A_q) = (s^k A)_{q+k}$ y también $ds^k = (-1)^k s^k d$.

LEMA 4. <u>Si</u> $f : A \longrightarrow C$ <u>es un homomorfismo de grado</u> $k \geqslant 0$, <u>entonces existe un homomorfismo único</u> $f : s^k A \longrightarrow C$ <u>de grado cero tal que el diagrama</u>

$$\begin{tikzcd} s^kA \arrow[rr, "\tilde{f}"] & & C \arrow[dl, "f"] \\ & A \arrow[ul, "s^k"] & \end{tikzcd}$$

__es conmutativo.__

Tomando $\tilde{f}x = (-1)^{kq} f\, s^k(a) = (-1)^{kq} f(a)$, el lema es consecuencia de las definiciones.

PROPOSICION 6. __Si__ $k \leqslant 0$, __entonces__

$$H^0(\mathrm{Hom}_\Lambda(s^{-k}A,C)) = H^k(\mathrm{Hom}_\Lambda(A,C)).$$

Esta resulta del lema anterior, tomando en cuenta que $ds^k = (-1)^k s^k d$.

LEMA. 5. __Si__ $f : A \longrightarrow C$ __es un homomorfismo de grado__ $-k \leqslant 0$, __entonces existe un homomorfismo único__ $\tilde{f}: A \longrightarrow s^kC$ __de grado cero, tal que el diagrama__

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "f"'] & & s^kC \\ & C \arrow[ur, "s^k"'] & \end{tikzcd}$$

__es conmutativo.__

Este resulta inmediato tomando $\tilde{f} = s^k f$.

Como consecuencia, obtenemos, igual que antes, la

PROPOSICION 7. __Si__ $k \geqslant 0$, __entonces__

$$H^o(\mathrm{Hom}_\Lambda(A,s^kC) = H^k(\mathrm{Hom}_\Lambda(A,C)).$$

DEFINICION. Sea Λ un anillo y A un Λ-módulo graduado diferencial. Definimos otro Λ-módulo graduado diferencial cA como

$$(cA)_q = A_q + sA_q, \quad \text{(suma directa de } \Lambda\text{-módulos)}$$

$$d(x,y^+) = (d_x+(-1)^{q-1}y,\ dy^+).$$

$dd = 0$ puesto que

$$dd(x,y^+) = d(dx+(-1)^{q-1}y, dy^+) = ((-1)^{q-1}dy+(-1)^q dy, 0) = 0.$$

Demostraremos ahora que cA es acíclico. En efecto, construyendo

$$S(x,y^+) = (-1)^q(0,x^+) = (0,sx),$$

tenemos que

$$dS(x,y^+) = d(0,sx) = (-1)^q d(0,x^+) = (-x,(-1)^q dx^+),$$

$$Sd(x,y^+) = S(dx+(-1)^{q-1}y,dy^+) = (-1)^{q-1}(0,dx^+ + (-1)^{q-1}y^+),$$

de donde $Sd - dS = \text{ident.}$, q. e. d.

Por lo tanto resulta inmediata la

PROPOSICION 8. <u>El homomorfismo</u> $s : A \longrightarrow sA$ <u>induce un isomorfismo</u>

$$s_* : H(A) \longrightarrow H(sA)$$

<u>de grado</u> 1.

DEFINICIONES

$$\overline{W}(K(A)) = K(sA) \ ,$$

$$W(K(A)) = (K(CA).$$

La sucesión

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} cA \xrightarrow{j} sA \longrightarrow 0$$

es exacta, siendo $i(x) = (x,0)$, $j(x,y^+) = y^+$ respectivamente la inclusión y la proyección naturales. Por la exactitud del functor K, la sucesión

$$0 \longrightarrow K(A) \longrightarrow W(K(A)) \longrightarrow \overline{W}(K(A)) \longrightarrow 0.$$

resulta exacta

TEOREMA 9. <u>Si X es un complejo s. s. y A es un complejo de cadenas para $k \geq 0$ se tiene</u>

$$\pi(X,K(s^kA)) \cong H^k(\mathrm{Hom}_\Lambda(C(X)_N,A)).$$

Por el teorema 5

$$\pi(x,K(s^kA)) \cong H_0(\mathrm{Hom}_\Lambda(C(X)_N,s^kA))$$

y por el lema

$$H_0(\mathrm{Hom}_\Lambda(C(X)_N,\ s^kA)) \cong H^k(\mathrm{Hom}_\Lambda(C(X)_N,A).$$

TEOREMA 10. <u>Si X es un complejo s.s. y A un complejo de cadenas, para $k \leq 0$ se tiene</u>

$$\pi(s^{-k}X,K(A)) = H^k(\mathrm{Hom}_\Lambda(C(X)_N,A))$$

De los resultados anteriores se deduce que

$$H^k(\mathrm{Hom}_{\Lambda}(C(X)_N, A) = H_0(\mathrm{Hom}_{\Lambda}(C(s^{-k}X)_N, A) = \pi(s^{-k}X, K(A)).$$

OBSERVACION. Sea A un subcomplejo del c.s.s. X y sea $C(X,A)$ el grupo de cadenas relativas. Entonces el teorema 5 puede enunciarse en la forma

TEOREMA 5'. <u>El functor</u> $N : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ <u>induce un isomorfismo natural</u>

$$\chi : \pi((X,A), (\Gamma, e)) \longrightarrow H_0(\mathrm{Hom}(C(X,A)_N, \Gamma_N).$$

<u>Suspensión de un c.s.s.</u> Sea X un complejo s. s. y $*$ un punto básico: $* \in X_0$. Denotaremos también con $*$ el punto $s_0^q * \in X_q$. Definimos la suspensión sX de X como el c. s. s. tal que

$$(sX)_0 = \{*\}$$

$$(sX)_{q+1} = \{(s_q, \ldots, x_0) \mid x_i \in X_i, \text{ tal que a lo sumo una de las } x_i \text{ no sea el punto básico}\};$$

$$\partial_0(x_q, \ldots, x_0) = (x_{q-1}, \ldots, x_0);$$

$$\partial_{i+1}(x_q, \ldots, x_0) = (\partial_i x_q, \partial_{i-1} x_{q-1}, \ldots, (\partial_0 x_{q-1})(x_{q-i-1}), x_{q-i-2}, \ldots, x_0), \quad (\text{para } i < q);$$

(Como, por la definición, o bien $\partial_0 x_{q-i}$ ó bien x_{q-i-1}

debe ser el punto básico, el producto $(\partial_o x_{q-i})(x_{q-i-1})$ significa el primer factor si el segundo es $*$ e inversamente.)

$$\partial_{q+1}(x_q,\ldots,x_o) = (\partial_q x_q,\ldots,\partial_1 x_1);$$

los operadores de degeneración se definen como

$$s_o(x_q,\ldots,x_o) = (*,x_q,\ldots,x_o), \qquad (*\in X_{q+1})$$

$$s_{i+1}(x_q,\ldots,x_o) = (s_i x_q,\ldots,s_o x_{q-1}, *, x_{q-i-1},\ldots,x_o) \quad (i\leqslant q)$$

TEOREMA 11. <u>La suspensión induce para toda $q\geqslant 0$ un isomorfismo</u>

$$s : H_q(X,*) \longrightarrow H_{q+1}(sX,*) = H_{q+1}(sX).$$

Se define

$$s : X_q \longrightarrow (sX)_{q+1}$$

como

$$s(x) = (x,*,\ldots,*).$$

Como s transforma simplejos degenerados en degenerados, induce un homomorfismo designado también por s,

$$s : C_q(X)_N \longrightarrow C_{q+1}(sX)_N$$

el cual se comprueba fácilmente que es isomorfismo, ya que un elemento $(x_q,\ldots,x_o)$ es no degenerado si y sólo si x_q no es degenerado. Tenemos además

$$s\,\partial_i x_q = (\partial_i x_q, *, \ldots, *)$$

$$= \partial_{i+1}(x_q, *, \ldots, *) = \partial_{i+1} s x_q,$$

es decir, $s\partial_i = \partial_{i+1}s$, de donde,

$$s\partial = s(\textstyle\sum_{i=0}^{q} (-1)^i \partial_i) = \sum_{i=0}^{q}(-1)^i \partial_{i+1} s = -\partial s.$$

De aquí tenemos, para $q>0$

$$s : H_q(X) \cong H_{q+1}(sX).$$

Ya que $C_q(*) \subset D(C_q(X))$, se tiene si $q>0$, que $C_q(X, *)_N = C_q(X)_N$ y análogamente, para $q \geqslant 0$, $C_{q+1}(sX, *) = C_{q+1}(sX)$, de donde

$$H_q(X, *) = H_q(X) \qquad \text{para} \quad q>0,$$

$$H_{q+1}(sX, *) = H_{q+1}(sX) \qquad \text{para} \quad q \geqslant 0.$$

Finalmente, para $q = 0$, consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
C_1(X,*)_N = C_1(X)_N & \xrightarrow{\cong} & C_2(sX)_N \\
\downarrow \partial & & \downarrow \partial \\
Z_0(X,*)_N = C_0(X)_N & \xrightarrow{\cong} & C_1(sX)_N = Z_1(sX)_N \\
& & \downarrow \partial \\
& & C_0(sX,*) \\
& & \downarrow \\
& & 0
\end{array}$$

Sea $(x_o) \in Z_1(sX)_N$. Entonces (x_o) es imagen de $x_o \in Z_o(X,+)$ es decir en el último renglón se tiene un epimorfismo, de donde,

$$H_o(X,*) \cong H_1(sX).$$

4. Operaciones cohomológicas

Sea A un grupo graduado diferencial y X un complejo simplicial. Definimos

$$H(X;\ A) = H^{o}(\mathrm{Hom}\ (C(X)_N, A)).$$

Si $A_n = \Pi$, $A_q = 0$ para $q \neq n$, se tiene

$$H^{o}(\mathrm{Hom}(C(X)_N, A)) = H^{n}(X,\ A).$$

Sean A y C dos grupos graduados diferenciales. Una operación cohomológica relativa a A y C es un functor

$$T : H(X;\ A) \longrightarrow H(X; C)$$

tal que si f es una transformación s.s. de X en Y, el siguiente diagrama sea conmutativo:

$$\begin{tikzcd} H(X;\ A) \arrow[r, "T"] & H(X;\ C) \\ H(Y;\ A) \arrow[r, "T"] \arrow[u, "f^*"] & H(Y;\ C) \arrow[u, "f^*"] \end{tikzcd}$$

TEOREMA 12. <u>El conjunto</u> $\mathcal{O}$ <u>de operaciones cohomológicas relativas a</u> A, C <u>está en correspondencia biunívoca con</u> $\Pi(K(A),\ K(C))$.

Sea T una operación cohomológica dada. Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
C(K(A)) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "N"] & K(A) \arrow[d, "N"] \\
C(K(A))_N \arrow[r] \arrow[dr, "i_A"'] & (K(A))_N \arrow[d, "\lambda", "\cong"'] \\
& A
\end{tikzcd}$$

donde i es el homomorfismo canónico, e i_A el inducido por el diagrama. Entonces i_A es un homomorfismo de cadena de $C(K(A))_N$ en A y por lo tanto es un 0-cociclo de $Hom(C(K(A)_N, A)$. Designaremos también con iA a su clase de cohomología. Entonces $Ti_A \in H(K(A); C) = H^0(Hom\ (C(K(A)_N, C)) = \pi(K(A), K(C))$ y la correspondencia es $T \longrightarrow Ti_A$.

Sea ahora $\alpha \in \pi(K(A),\ K(C))$. Sea $x \in H(X,\ A)$. Como $H(X,A) \cong \pi\ (X,K(A))$, x induce una transformación s. s. de X en $K(A)$ que designaremos también con x. Definimos en el diagrama

$$X \xrightarrow{x} K(A) \xrightarrow{\alpha} K(C),$$

$Tx = x$, con $T_\alpha x \in \pi(X,K(C)) = H(X;C)$. Entonces la correspondencia es $\alpha \longrightarrow T_\alpha$. Se comprueba que las dos composiciones son las identidades respectivas, de donde resulta la biunivocidad.

<u>Definición de</u> $E(\Gamma)$ <u>y de</u> $\Omega(\Gamma)$. Sea Γ un complejo abeliano de grupos. Definimos otro complejo abeliano de grupos $E(\Gamma)$ en la forma siguiente:

$$E_q(\Gamma) = \{x \in \Gamma_{q+1} \mid \partial_1 \ldots \partial_{q+1} x = 1\}, \quad (q \geq 0)$$

$$\bar{\partial}_i \, x_E = \partial_{i+1} x$$

$$\bar{s}_i \, x_E = s_{i+1} x_\Gamma$$

donde $x = x_E = x_\Gamma$, indicando los índices, el grupo al cual se considera que pertenece la x.

Se tiene un homomorfismo $S : E(\Gamma) \longrightarrow E(\Gamma)$

$$S \, x_E = (s_0 x_\Gamma)_E,$$

y vemos que

$$\bar{\partial}_0 S = \bar{\partial}_1 s_0 = \mathrm{id}, \quad \bar{\partial}_{i+1} S = \partial_{i+2} s_0 = s_0 \partial_{i+1} = S \bar{\partial}_i,$$

de donde resulta que

$$S \partial = S \sum (-1)^i \bar{\partial}_i = \sum (-1)^i \bar{\partial}_{i-1} S = -\partial S.$$

Es decir, S es una contracción y por consiguiente $E(\Gamma)$ es acíclico.

Definimos $p : E \longrightarrow \Gamma$ con la fórmula

$$p(x_E) = \partial_0 x.$$

Como $\partial_0 s_0 = \mathrm{id.}$, resulta inmediato que p es un epimorfismo. Sea $\Omega(\Gamma) = \operatorname{Ker}(p:E(\Gamma) \longrightarrow \Gamma)$. Entonces

PROPOSICION 9. Si A es un complejo de cadenas,

$$\Omega(K(sA)) = K(A).$$

Para la demostración de esta proposición puede consultarse [4].

Sea $T:H(X,A) \longrightarrow H(X,C)$ una operación cohomológica relativa a A, C, y $\alpha \in \pi(K(A), K(C))$ la clase que la representa. Entonces α determina un elemento

$$\Omega(\alpha) \in \pi(\Omega(K(A)), \Omega(K(C)),$$

la cual determina una operación cohomológica

$$\Omega(T) : H(X, \Omega(K(A)) \longrightarrow H(X, \Omega(K(C)),$$

llamada la suspensión de T.

En particular, si T es una operación cohomológica relativa a sA, sC entonces por la proposición 9, $\Omega(T)$ es una operación cohomológica relativa a A y C.

LEMA 6. La proyección p es una transformación fibrante.

Demostración. Sean $y_0, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_{q+1}$ $E_q(\Gamma)$ tales que $p(y_i) = \partial_i x$, es decir, $\partial_0 y_i = \partial_i x$ y además, tales que $\overline{\partial}_i y_i = \overline{\partial}_{j-1} y_i$ $(i < j)$. De aquí,

$$\partial_{i+1} y_j = \partial_j y_i.$$

Sean $y'_o = x$, $y'_1 = y_o, \ldots, y'_k = y_{k-1}$, $y'_{k+2} = y_{k+1}, \ldots,$

$y'_{q+2} = y_{q+1} \in \Gamma_{q+1}$. Por ser Γ de Kan, existe $z \in \Gamma_{q+2}$

tal que $\partial_i z = y'_i$. Por lo tanto $\partial_o z = x$. Además $z \in$

$E_{q+2}(\Gamma)$ ya que

$$\partial_1 \ldots \partial_{q+2}\, z = \begin{cases} \partial_1 \ldots \partial_{q+1}(\partial_{q+1} z) = \partial_1 \ldots \partial_{q+1} y_{q+1} \\ \partial_1 \ldots \partial_{q+1}(\partial_{q+2} z) = \partial_1 \ldots \partial_{q+1} y'_{q+2} \end{cases}$$

con lo que queda demostrado el lema.

5. Operaciones cohomológicas aditivas.

Sean A, B dos complejos de cadenas, x, y dos elementos de $H(X,A) = H^0$ (Hom $(C(X_N,A)$. Por el teorema 5, x, y determinan dos elementos $K(x), K(y) \in \pi(X,K(A))$. Consideremos el diagrama

$$X \xrightarrow{\theta} X\times X \xrightarrow{K(x)\times K(y)} K(A)\times K(A) \xrightarrow{\varphi} K(A)$$

donde θ es la transformación diagonal y φ la operación de grupo.

LEMA 7. <u>En el diagrama anterior se tiene</u>

$$K(x+y) = \varphi(K(x)\times K(y))\theta.$$

En efecto, sea $b \in X$. Entonces

$$\varphi(K(x)\times K(y))\theta b = \varphi(K(x)\times K(y))(b,b) = \varphi(K(x)(b),K(y)(b)) =$$

$$= \varphi(K(x(b)),K(y(b)) = K(x(b)) + K(y(b)) = K(x(b) + y(b))$$

$$= K((x+y)b) = K(x+y)(b).$$

TEOREMA 13. <u>Una operación cohomológica</u>

$$T : H(X,A) \longrightarrow H(X,B)$$

<u>es aditiva si y sólo si el diagrama</u>

$$\begin{array}{ccc} K(A)\times K(A) & \xrightarrow{\alpha_T\times\alpha_T} & K(B)\times K(B) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ K(A) & \xrightarrow{\alpha_T} & K(B) \end{array}$$

<u>es conmutativo, excepto por homotopías, donde</u> $\alpha_T \in \pi(K(A),K(B))$ <u>representa la transformación s. s. que según el teorema 12 corresponde a</u> T.

<u>Demostración</u>. Del diagrama

$$\begin{array}{ccccc} C(X)_N & \xrightarrow{x} & A & \xrightarrow{N(\alpha_T)} & B \\ \Big\downarrow{\scriptstyle K} & & \Big\downarrow{\scriptstyle K} & & \Big\downarrow{\scriptstyle K} \\ X\subset C(X) & \xrightarrow{K(x)} & K(A) & \xrightarrow{\alpha_T} & K(B) \end{array}$$

tenemos $T(x) = N(\alpha_T)x$, o bien $K(T(x)) = \alpha_T K(x)$. Así pues,

$$K(T(x+y)) = \alpha_T K(x+y) = \alpha_T \varphi(K(x)\times K(y))\theta$$

$$K(T(x)+T(y)) = \varphi(K(T(x))\times K(T(y)))\theta = \varphi(\alpha_T K(x)\times\alpha_T K(y))\theta$$

$$= \varphi(\alpha_T\times\alpha_T)(K(x)\times K(y))\theta,$$

de donde $K(T(x+y))$ es homotópico a $K(T(x)+T(y))$ si y sólo si $\alpha_T\varphi$ es homotópico a $\varphi(\alpha_T\times\alpha_T)$. Además por el teorema 5, $K(T(x+y))$ es homotópico a $K(T(x)+T(y))$ si y sólo si $T(x+Y)$ es homólogo a $T(x) + T(y)$, con lo cual queda demostrado el teorema.

Sea ahora X un c. s. s. de Kan, $*$ un simplejo de X_0. Supondremos X conexo. Recordamos que con

$$Y = (X,*)^{(I,0)}$$

se designa al c. s. s. definido como sigue:

Y_q consta de las transformaciones s. s.

$$f : (\Delta_q \times I, \Delta_q \times (0)) \longrightarrow (X,*),$$

donde los operadores faciales y de degeneración son

$$\partial_i f = f(\lambda_i \times \mathrm{id.}),$$

$$s_i f = f(\eta_i \times \mathrm{id.}).$$

Sea $p' : Y \longrightarrow X$ la transformación definida por

$$p'(f) = f((0,\ldots,q),\ s_0^q 1).$$

LEMA 8. Y <u>es un c. s. s. contractible,</u> p' <u>es fibrante y la fibra es</u>

$$\Omega'(X,*) = (X,*)^{(I,\dot{I})}$$

La demostración, excepto la contractibilidad, puede verse en [4] Cap. 1A, teor. 4.

LEMA 9. <u>Siendo</u> Γ <u>un complejo de grupos,</u> $\Omega(\Gamma)$ <u>y</u> $\Omega'(\Gamma)$ <u>son del mismo tipo de homotopía.</u>

Por ser $E(\Gamma)$ contractible y p, p' fibrantes, puede demostrarse que toda transformación de $\Gamma \longrightarrow \Gamma$ puede levantarse a una transformación de fibrados:

$$\begin{array}{ccc} E(\Gamma) & \dashrightarrow & Y \\ \downarrow p & & \downarrow p' \\ \Gamma & \longrightarrow & \Gamma \end{array}$$

Por lo tanto se tiene una transformación entre las sucesiones exactas de homotopía:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \longrightarrow & \pi(\Omega(\Gamma),1) & \longrightarrow & \pi(E(\Gamma),1) = 0 & \longrightarrow & \pi(\Gamma,1) & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \cong & \\ \cdots \longrightarrow & \pi(\Omega'(\Gamma),1) & \longrightarrow & (Y,1) \;=\; 0 & \longrightarrow & \pi(\Gamma,1) & \longrightarrow 0 \end{array}$$

donde $\pi(\Gamma,1) \longrightarrow \pi(\Gamma,1)$ es el isomorfismo inducido por la identidad de Γ en Γ. Como $\pi(Y,1) = 0$, tenemos dos isomorfismos consecutivos, de donde el restante vertical lo es también, y por el teorema de Whitehead semisimplicializado resultan $\Omega(\Gamma)$ y $\Omega'(\Gamma)$ del mismo tipo de homotopía.

TEOREMA 14. <u>La suspensión de una operación cohomológica es una operación cohomológica aditiva.</u>

Construyamos primero una operación de multiplicación para $\Omega'(X)$. Consideremos el c. s. s.

$$U = (X,*)^{(\Delta_2,\Delta_2^0)}$$

donde Δ_2^0 es el 0-esqueleto (s.s.) de Δ_2. Sean

$$\alpha_i : \Delta_q \times \Delta_1 \longrightarrow \Delta_q \times \Delta_2, \qquad i=0,1,2$$

las transformaciones s. s. definidas por

$$\alpha_i = (\mathrm{id.} \times \lambda_i).$$

Puede demostrarse el

LEMA 10. <u>La transformación</u> $\pi : U \longrightarrow \Omega'(X) \times \Omega'(X)$ <u>definida por</u>

$$\pi(f) = (f\alpha_0, f\alpha_2)$$

<u>es fibrante, con fibra contractible.</u>

De aquí debe demostrarse que existe una sola clase de homotopía de secciones $\{\gamma\}$. Sea $\rho : U \longrightarrow \Omega'(X)$ definida por $\rho(f) = f\alpha_1$. Obtenemos un diagrama

$$\Omega'(X) \times \Omega'(X) \underset{\pi}{\overset{\gamma}{\rightleftarrows}} U \longrightarrow \Omega'(X)$$

La composición $\rho\gamma$ es la operación mencionada.

Se debe demostrar también que si $X = \Gamma$ es un complejo de grupos, entonces $K(\rho\gamma)$ es homotópica a la operación ya mencionada antes. Pasemos al teorema.

Sea T una operación cohomológica relativa a A y B, $\alpha_T : K(A) \longrightarrow K(B)$ un elemento de la clase que representa a T, $f = N(\alpha_T) : A \longrightarrow B$ la transformación s. s. respectiva. Entonces f da lugar al siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
\Omega'(A) & \xrightarrow{\Omega'(f)} & \Omega'(B) \\
\downarrow p & & \downarrow p \\
U_A & & U_B \\
\gamma \uparrow \downarrow \pi & & \gamma \uparrow \downarrow \pi \\
\Omega'(A) \times \Omega'(A) & \xrightarrow{\Omega'(f) \times \Omega'(f)} & \Omega'(B) \times \Omega'(B),
\end{array}$$

del cual por el lema 9 y por las observaciones anteriores se pasa al diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} K(\Omega(A)) & \xrightarrow{K(\Omega(f)) = \alpha_{\Omega(T)}} & K(\Omega(B)) \\ \uparrow \varphi & & \uparrow \varphi \\ K(\Omega(A)) \times K(\Omega(A)) & \xrightarrow{\alpha_{\Omega(T)} \times \alpha_{\Omega(T)}} & K(\Omega(B)) \times K(\Omega(B)) \end{array}$$

y por el teorema 13 queda demostrado el teorema 14.

TEOREMA 15. <u>Sea</u> $\alpha_T : K(\pi, n) \longrightarrow K(G, q)$ <u>una operación cohomológica y</u> $pG = 0$. <u>Entonces</u> T <u>es la suspensión de una operación cohomológica</u> T':

$$\alpha_{T'} : K(\pi, n+1) \longrightarrow K(G, q+1).$$

La demostración puede verse en [1].

LEMA 11. <u>Sea</u> Γ <u>un complejo de grupos abelianos. Entonces existe un homomorfismo s. s.</u>

$$f : \Gamma \longrightarrow \prod_n K(\pi_n(\Gamma), n)$$

<u>que es una equivalencia homotópica</u>.

Para la demostración ver [3]. Con esto podemos demostrar un teorema que generalice al 15.

TEOREMA 16. <u>Sea</u> T <u>una operación cohomológica relativa a</u> A, B <u>y supongamos que</u>

T <u>es aditiva</u>

$$B_o = 0,\ pB = 0 \qquad (p \text{ un primo})$$

__Entonces__ T __es la suspensión de una operación cohomológica aditiva__ T' __relativa a__ sA, sB.

Consideremos el elemento $\alpha_T \in \pi(K(A), K(B))$ correspondiente a T. Por el lema 11, $K(A)$ es homotópicamente equivalente a $\prod_m K(\pi_m(K(A)),m)$ y $K(B)$ es homotópicamente equivalente a $\prod_n K(\pi_n(K(B)),n)$. Por consiguiente, ya que $\pi_n(K(A)) = H_n(A)$,

$$\pi(K(A),K(B)) \cong \prod_{m,n} (K(H_m(A),m),\ K(H_n(B),n)).$$

Como α_T es aditiva cada uno de los factores lo es y utilizando el teorema 15, resulta que α_T es suspensión.

En [3] puede encontrarse el ejemplo de una operación cohomológica aditiva que no es suspensión. Daremos la construcción. Sea n impar y $p \neq 2$, primo. Sea $i_n \in H^n(Z_p, n:Z_p)$ el generador canónico y δ^* el Bockstein correspondiente a la sucesión $0 \longrightarrow Z \xrightarrow{p} Z \longrightarrow Z_p \longrightarrow 0$. Consideremos el producto $(\delta^* i_n)^p \in H^{(n+1)p}(Z_p, n; Z)$. la operación T determinada por este elemento es aditiva pero no es la suspensión de otra operación.

En [1] puede encontrarse también el siguiente resultado.

TEOREMA 17. <u>Sea</u> G <u>un grupo tal que</u> $pG = 0$. <u>Sea</u> $\alpha \in H^{n+k}(\pi, n; G)$, con $k \leq (p-1)n$. <u>Si</u> α <u>es aditiva, existe una sola operación cohomológica</u> $\beta \in H^{n+k+1}(\pi, n+1; G)$ <u>tal que</u> $\sigma^*(\beta) = \alpha$.

Sea ahora T una operación cohomológica relativa a A, sB. Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} E_T \arrow[r] \arrow[d] & W(K(B)) \arrow[d, "K(B)"] \\ K(A) \arrow[r, "T"] & K(sB), \end{tikzcd}$$

donde E_T es el espacio fibrado inducido por α_T. Nos preguntamos, cuando podemos introducir una estructura de H-espacios en E_T. La respuesta es:

TEOREMA 18. E_T <u>es un H-espacio</u> (s.s.) <u>si y sólo si</u> T <u>es una operación cohomológica aditiva</u>.

Introduzcamos primero la desviación a que una operación $\alpha_T : K(A) \longrightarrow K(sB)$ sea aditiva. Consideremos

$$\begin{tikzcd} K(A)\times K(A) \arrow[r, "\alpha_T \times \alpha_T"] \arrow[d, "\varphi"] & K(sB)\times K(sB) \arrow[d, "\varphi"] \\ K(A) \arrow[r, "\alpha_T"] & K(sB) \end{tikzcd}$$

y sea $DT : K(A)\times K(A) \longrightarrow K(sB)$ definida por

$$DT(x,y) = [\varphi'(\alpha_T \times \alpha_T)(x,y)]\,[\alpha_T\varphi(x,y)]^{-1}.$$

Entonces el teorema 18 puede reenunciarse en la forma

TEOREMA 18'. E_T <u>es un H-espacio si y sólo si</u> DT <u>es homotópico a cero</u>.

Supongamos que DT es homotópico a cero. Entonces en el diagrama

$$\begin{tikzcd} & W(K(B)) \arrow[d, "\pi"] \\ K(A)\times K(A) \arrow[ur, dashed, "\lambda"] \arrow[r, "DT"] & K(sB) \end{tikzcd}$$

existe λ que lo hace conmutativo. Recordemos que $(E_T)_q$ $= \{(x,y) \mid x \in W(K(B))_q,\ y \in K(A),\ \alpha_T(y) = \pi(x)\}$

Definimos

$$E_T \times E_T \xrightarrow{F_\lambda} E_T$$

con la fórmula

$$F_\lambda((x,y),(x',y')) = (xx'\lambda(yy'),yy') \in E_T.$$

(Vemos pues que la estructura de H-espacio en E_T no es única, es más, las posibles estructuras en E_T están en correspondencia biunívoca con $\mathcal{M}(K(A)\times K(A),K(B))$.)

Recíprocamente supongamos que E_T es un H-espacio.

Consideremos

$$\begin{tikzcd} E_T\times E_T \arrow[d] & W(K(B))\times W(K(B)) \arrow[d] \\ E_T \arrow[r, "T"] & W(K(B)) \end{tikzcd}$$

Puesto que $W(K(B))$ y $W(K(B))\times W(K(B))$ son contractibles la transformación $\tilde{T}\times\tilde{T}: E_T\times E_T \longrightarrow W(K(B))\times W(K(B))$ hace conmutativo el diagrama módulo homotopía. Claramente es una transformación de espacios fibrados, lo que hace que, al considerar las bases de los correspondientes espacios fibrados obtengamos

$$\begin{tikzcd} K(A)\times K(A) \arrow[r, "\alpha_T\times\alpha_T"] \arrow[d] & K(sB)\times K(sB) \arrow[d] \\ K(A) \arrow[r, "\alpha_T"] & K(sB), \end{tikzcd}$$

conmutativo módulo homotopía, luego T es aditiva ó DT es homotópica a cero.