grúpunni sem myndast af elliptíska ferlinum að ofan. Samkvæmt niðurstöðum talnafræðingsins Mordell er grúpan af forminu

$$\mathbf{Z}^r \oplus F$$

þar sem $\mathbf{Z}$ táknar heilu tölurnar og F er abelsk endanleg grúpa. Mazur, sem ég minntist á áðan, hefir með mjög djúpri analýsu sannað að grúpan F hefir aðeins 15 möguleika, nefnilega

$$\mathbf{Z}_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, 10, 12$$

$$\mathbf{Z}_{2n} \oplus \mathbf{Z}_2, \quad n = 1, 2, 3, 4.$$

Hinsvegar er minna vitað um r; t.d. er ekki vitað hvort nokkur takmörk séu fyrir stærðinni á r.

Sönnun Wiles hefir nú birzt í tímaritinu Annals of Mathematics og hún samanstendur af einni grein eftir Wiles og annarri eftir Taylor og Wiles. Sönnunin í heild er yfir 200 síður og notar þar að auki mest af því sem gerst hefir í aritmetískri algebrurúmfræði síðustu 25 árin.

Þetta einstaka vísindaafrek er sláandi dæmi þess að mestu framfarirnar í stærðfræði gerast þegar mismunandi greinar hennar tengjast saman.

Viðtal við Sigurð Helgason
Fyrri hluti

Um jólin 1999 tóku Robert Magnus og Ragnar Sigurðsson viðtal við Sigurð Helgason þar sem hann sagði frá ferli sínum sem stærðfræðingi. Þar kemur margt fram, m.a. um menntun hans allt frá unglingsárunum, um það hvernig áhugi hans á stærðfræði vaknaði, um verkefni sem hann hefur fengist við gegn um árin og um stærðfræðinga sem hann hefur kynnst. Fyrri hluti viðtalsins birtist nú en seinni hluti kemur væntanlega út í haustbréfi félagsins.

RM: Hvenær fékkstu fyrst áhuga á stærðfræði? Var það kannske á menntaskólaárunum fyrir norðan?

SH: Já, það var í 5. bekk myndi ég segja. Ég var þá 16 ára. Ég var í stærðfræðideildinni í Menntaskólanum á Akureyri og kennarinn í stærðfræði var Trausti Einarsson. Hann var alltaf kallaður doktor Trausti og naut mikillar virðingar. Hann var kennari fyrir norðan í 10 ár. Hans aðalgrein var stjörnufræði.

Trausti kenndi okkur analytiska geómetríu. Hann var mjög fjölhæfur. Hann var menntaður sem stjörnufræðingur, en fór svo að mennta sig líka í jarðfræði. Hann var ágætur sem kennari í þessu fagi í menntaskólanum. Maður sá að hann bar mikla virðingu fyrir stærðfræðinni. Það hafði mjög pósitíf áhrif á nemendur. Hann hafði stundað háskólanám í Göttingen ásamt Leifi Ásgeirssyni og hefur sjálfsagt tekið einhverja stærðfræðikúrsusa þar. En svo hvarf hann til Háskóla Íslands haustið 1944, þannig að það var Sveinn Þórðarson sem var kennari minn í stærðfræði síðasta árið. Hans aðalgrein var nú ekki stærðfræði heldur, hún var efnafræði. Hann var líka mjög áhugasamur kennari. Nú, ég var ekki í neinum vafa um að ég ætlaði að fara í stærðfræði eftir þetta, þó ég hefði ekki hugmynd um hvað æðri stærðfræði snerist um. Ég hafði varla séð stærðfræðibók fyrir utan kennslubækurnar. Hafði þó keypt bækurnar Hall & Knight *Higher Algebra* og C. Smith *Conic Sections* sumarið 1944. Á þær enn og þykir vænt um.

RS: Hvenær tókstu stúdentspróf?

SH: Ég er stúdent 1945. Þá var nú meiningin að fara til Hafnar, en þetta var rétt eftir stríðið og mér var sagt að háskólinn væri ekki almennilega kominn í gang; þannig var það praktískara að vera bara eitt ár í verkfræðideildinni hér heima af því að þá var námið mjög svipað. Fyrstu tvö árin fyrir stærðfræðinga og eðlisfræðinga í Höfn voru sameiginleg verkfræðingum.

RM: Voru einhverjir aðrir í stærðfræðinámi?

SH: Nei, nei, það var enginn annar. Ég fór hingað til Reykjavíkur haustið 1945. Ég var í stærðfræðigreiningu hjá Leifi, línulegri algebru hjá Trausta og geómetríu hjá Sigurkarli. Svo var ég í eðlisfræði hjá Steinþóri Sigurðssyni. Hann var mjög líflegur kennari. Mínir samstúdentar, sem voru verkfræðingar, fóru með mikinn tíma í teikningar en ég hafði tiltölulega lítið að gera. Ég tefldi talsvert skák það árið. Ég fór í fjöltefli að minnsta kosti einu sinni við Árna Snævarr. Það stóð langt fram á nótt, man ég. Svo var ég í einhverri tímakennslu útí bæ. Það var nú ekki mikill tími sem fór í það að vísu.

Svo leitaði ég að einhverjum stærðfærðilitteratúr að grúska í, en það var mjög lítið til á safninu. Ég held að það hafi verið til ein bók um hlutafleiðujöfnur eftir Franck og Mieses, tveggja binda bók dálítið svipuð Courant-Hilbert. Einnig fór ég á Landsbókasafnið. Þar þurfti maður að bíða lengi eftir að fá bók úr safninu, en ég fann ekkert sem ég sá að ég gæti lesið mér til gagns. Það hefði verið gott að hafa aðgang að hillunum. Svo var það þýska stærðfræðiencyclopedian sem var í lessalnum. Þið kannist við hana, er það ekki? Fyrir prófessíonal stærðfræðinga er hún gagnleg vegna þess að það er svo mikið af sögulegum heimildum í henni, en það er reiknað með að menn kunni fagið, áður en þeir fara út í hana, þannig að hún var gagnslítil fyrir mig.

Þetta var nú skemmtilegt ár að mörgu leyti. Svo var ég um sumarið efnafræðingur á Ingólfsfirði við síldarverksmiðjuna. Það var frændi minn Ingi Bjarnason, sem setti mig inn í hvað ég átti að gera þarna. Það var að analysera prótein, vatn og fitu í síld. Hann sagði: „Þegar þú ferð til Danmerkur í efnafræðina þar, þá flýgur þú í gegnum laboratoriumkúrsana þar, því það er miklu meira spunnið í það sem þú gerir þarna á Ingólfsfirði." En hvað um það, þetta var ágætt starf.

RS: Varstu að glíma við einhver stærðfræðileg vandamál, þegar þú varst nýstúdent 1945? Varstu farinn að hugsa eitthvað um að rannsaka?

SH: Nei, ég hafði varla hugmynd um að rannsóknir færu fram í stærðfærði. Ég hélt að stærðfræði næði rétt yfir menntaskólanámið og svo búið. Ég hafði aldrei séð stærðfræðitímarit. Að vísu hitti ég einstöku sinnum Brynjólf Stefánsson, sem var tryggingastærðfræðingur, og hann gaf mér handrit að grein eftir Ólaf Daníelsson, sem var kölluð *Lidt elementærgeometri.* Þar var setning um níupunktahringinn og þetta byggðist svolítið á setningu eftir Brynjólf sjálfan. Hún hafði komið út 1940 í Matematisk Tidskrift, sem nú er hluti af Normat.

Það var fyrsti grunur sem ég hafði um það að stærðfræðitímarit væru til. Ég tefldi líka við Brynjólf stundum. Hann var fyrirtaks skákmaður. Hann sagði mér ýmsar sögur frá sínum námsárum í Kaupmannahöfn, meðal annars hvernig hann hafði unnið hinn fræga skákmann Nimzowich. Það var mjög svo fróðlegt. Hann fór út í tryggingastærðfræði, en hafði mjög gaman af þessum einföldu rúmfræðidæmum. Ég hafði gaman af því líka og ég fékk snemma smekk fyrir geómetríu, sem ég hef alltaf haldið. Mér fannst analysan, bók Haralds Bohr og Mollerup, dálítið þurr miðað við geómetríuna, sem var skemmtilegri, en sú bók var skrifuð með það í huga að sýna fram á það, að hægt væri að byggja upp stærðfræðigreininguna alveg lógískt með Dedekind-sniðum. Það var viss boðskapur, sem kom í þessari bók, en fyrst þeir gerðu þetta að aðalatriðinu, þá var bókin dálítið þurr. Mér hefur alltaf fundist það, jafnvel seinna. Þriðja bindið er að vísu miklu líflegra.

RS: Veistu það að Harald Bohr er í heimsmetabók Guinness?

SH: Fyrir?

RS: Gettu nú!

SH: Fyrir fótbolta!?

RS: Og veistu hvað það var? Jú, það er mesti sigur í landsleik. Danir unnu Frakka 17–1 árið 1915, sem er heimsmet! Harald Bohr var í liðinu.

SH: Ég skal segja þér, að þegar ég kom til Hafnar, þá var alltaf fótboltaleikur milli byrjenda, það er að segja þeirra sem voru á fyrrihluta, og seinnihlutamanna. Ég var í öðru liðinu fyrsta árið og Harald Bohr var dómarinn. Sem dómara mætti nú kannske deila eitthvað á hann, því hann hafði alltaf samúð með þeim sem var að tapa. Hann sparkaði sem sagt til boltans þegar til kom og það hafði tilætluð áhrif.

RM: Þá erum við komnir til Kaupmannahafnar.

SH: Ég kom til Kaupmannahafnar um haustið 1946.

RM: Hvernig var að vera í námi þar?

SH: Það var að sumu leyti svipað því hérna. Ég hafði sem sagt í stærðfræðinni tekið fyrsta árs pensúmið. Á öðru ári hafði ég Thøger Bang í stærðfræðigreiningu, Werner Fenchel í rúmfræði, Svend Bundgaard í „Rationel Mekanik". Nú eru þeir allir látnir.

Þá var námið dálítið öðruvísi heldur en núna. Það var fyrrihlutapróf, sem var kallað „forprøve". Það var dálítið strembið próf, vegna þess að það þurfti að taka próf í öllum námsgreinum samtímis eftir tveggja ára nám. Það var skriflegt og munnlegt próf í öllum stærðfræðigreinunum, bæði í stærðfræðigreiningu, geómetríu og í rationel mekanik. Svo var munnlegt og skriflegt í eðlisfræði, munnlegt og skriflegt í efnafræði og skriflegt próf í stjörnufræði.

Þetta próf var eiginlega of þungt. Til dæmis, þegar ég tók það, þá voru ekki nema 6 af 27 sem komust í gegnum það. Þetta var náttúrlega að sumu leyti vegna þess að þeir sem voru gefnir fyrir svona fög fóru frekar í verkfræðina og jafnvel þeir sem fóru í þessi fög, stærðfræði, eðlisfræði, efnafræði og stjörnufræði, fóru flestir í eðlisfræði. Eðlisfræðin var miklu vinsælli en stærðfræðin á þeim árum vegna Niels Bohr.

RM: Kenndi Harald Bohr þér stærðfræði?

SH: Jú, en ekki fyrr en á seinnihluta. Eftir fyrrihlutaprófið voru framhaldskúrsusar í stærðfræði.

RS: Hvað voru það eiginlega margir sem náðu þessum prófum og fluttust þá yfir á seinnihluta? Voru það bara 6–7 manns?

SH: Nei talsvert meira því prófið var tvisvar á ári. Í fagprufubekkjunum voru kannske 8 í fyrirlestri í stærðfræði.

RS: Þurftu menn að taka allt aftur ef þeir féllu? Voru þetta svo strangar reglur?

SH: Já, „hele balladen" eins og sagt var. Það voru margir ágætis menn í stærðfræði, sem náðu ekki í gegn vegna þess að þeir féllu kannske í efnafræði. Og það var eftir Ørsted-skala sem fór niður í −23.

RS: Var þetta nú ekki vitlaust kerfi?

SH: Jú, ekki heppilegt, en eftir cand. mag.-námið (sem einnig fól í sér pædagókikum, þ.e. kúrsus í kennslu) áttu menn að vera góðir menntaskólakennarar í öllum greinunum. Kerfinu var breytt ég held í kringum 1960, það gæti hafa verið fyrr jafnvel. Á seinnihlutanum var prógrammið á þeim árum fremur fátæklegt, en þeir kúrsusar sem voru haldnir voru fyrsta flokks. Í Danmörku var gömul hefð fyrir ágætis kennslu í stærðfræði. Það var komplex analysa hjá Bohr. Ég held að það hafi verið ein þrjú misseri. Real analysa hjá Jessen, tvö eða þrjú misseri. Það var nokkuð avanseraður kúrsus. Hann fór meðal annars yfir í teóretískan líkindareikning. Svo var það Nörlund, sem var mjög virðulegur prófessor og varð mjög gamall. Ætli að hann hafi ekki orðið næstum 100 ára. Hann var fyrst og fremst forstöðumaður Geodetisk institut, en hafði skrifað bók sem kallaðist *Differenzenrechnung* og þótti á sínum tíma talsvert merkileg. Hans smekkur í stærðfræðinni var svokallaðar „special functions". Hann hélt kannske fyrirlestra um elliptísk föll, hypergeómetrisk föll og integrallíkingar, en þessir kúrsusar voru mjög stuttir. Hann byrjaði ekki fyrr en kannske þrjár vikur voru liðnar og endaði líka nokkuð snemma. Við vorum aldrei nema tveir í þessum kúrsusum. Það var ég og Knud Poder, sem er enn á lífi og er núna í jarðfræði við háskólann í Álaborg. Hann var undir handleiðslu Nörlund og það var ætlast til þess að hann hlustaði á alla þessa fyrirlestra. Við vorum sem sagt tveir í þessum kúrsusum og urðum ágætir vinir.

Ég hafði mjög frjálsar hendur þarna, þetta voru ekki nema örfáir kúrsusar. Það var svolítið í grúpufræði hjá Bundgaard einu sinni. Svo voru seminör, þar sem nemendur héldu erindi um eitthvert ákveðið efni. Það var náttúrlega ágæt æfing. En svo datt mér í hug að fara í verðlaunaverkefni, af því tagi sem ég vissi um að Ólafur Daníelsson hafði lagt fyrir sig. Hann var mér mikilvæg fyrirmynd, Ólafur Daníelsson, allt frá menntaskólaárunum. Framlag hans til íslenskrar menningar er ómetanlegt.

Ég hafði heyrt um það, að svona verðlaunaverkefni væri sett fram í hverju einasta fagi við háskólann. Þetta var alda gömul hefð, sem er enn í gangi. Maður hefur eitt ár til verkefnisins og svarinu átti að skila undir leynimerki. Ég túlkaði það þannig að maður ætti ekki að segja neinum frá því og ég gerði það ekki. Þessum verkefnum var stillt upp í aðalbyggingu háskólans á lista sem hét: „Universitetets prisspørsmaal for aaret 1950". Ég skrifaði hjá mér stærðfræðiverkefnið; það var eftirfarandi: „Der ønskes en undersøgelse af i vilken udstrækning de af den finske matematikerskole, særlig Rolf Nevanlinna, opnaaede resultater vedrørende værdifordelingen af analytiske funktioner, som er periodiske i en halvplan, kan almindeliggøres til ogsaa at omfatte analytiske næsten periodiske funktioner."

Og þar á eftir komu reglugerðirnar. „Adgangen staar aaben for enhver, der paa den tid svaret indsendes, ikke er fyllt 30 aar. Besvarelsen skall inleveres inden 15 januar 1951.“ Svo stendur: „Den til medaljen tilkendes faar naar han navngiver sig ett honorar paa 1000 kroner. Avhandlingerne maa kun betegnes med motto eller mærke medens forfatterens navn, fodselsesdag og aar skal angives paa en sedel i et vedlagt lukket konvolut, der er betegnet med samme mærke som afhandlingerne. Navnesedler till afhandlinger som ikke er tildelt et pris bliver ikke aabnede.“

Það var sem sagt engu að tapa á þessu. Þó maður ynni ekki til neins, þá var það engin æruskerðing. Mér fannst mjög freistandi að eiga við þetta.

RS: Þetta er nú greinilega runnið undan rifjum Haralds Bohr! Eða er það ekki?

SH: Jú eða kannske Jessen ennþá meira. Að vísu var gallinn á þessu, að ég hafði ekki hugmynd um hvað próblemið var og mér fannst ég ekki geta beðið neinn um að skýra það út fyrir mér heldur. Mér fannst ég ekki geta spurt neinn að þessu vegna þess að það átti að gera þetta leynilega. Ég náði mér þó í bók Nevanlinna, sem hét *Eindeutige Analytische Funktionen.* Þó ég væri nú slakur í topológíu, þá komst ég nú að því hvað aðalsetningar þessarar Nevanlinna-teóríu voru. Það var ekki fyrr en í júní, sex mánuðum seinna, að ég gerði mér grein fyrir því hvað vandamálið gekk út á, af því að það er talað um „analytiske funktioner som er periodiske i en halvplan“, en Nevanlinna-teórían var um föll á skífu. En ef maður tekur innsetninguna $z = e^s$, þá verða föllin lotubundin í s. Þá er það spurningin hvort hægt er að alhæfa frá lotubundnum föllum í s yfir í næstum lotubundin föll í s. Þá var það nokkuð klárt hvað átti að gera.

Þá fór ég að lesa mér svolítið til um greinar Jessens, af því að hann hafði alhæft formúlu Jensens um núllpunkta í skífu yfir í næstum lotubundin föll. Hjá Jessen voru þetta núllpunktar í lóðréttri ræmu. Ég tók eftir því, eftir að hafa hugsað dálítið um það, að það var von um að sanna fyrstu aðalsetningu Nevanlinna fyrir næstum lotubundin föll út af þessari formúlu Jessens og það var ekkert mjög erfitt. Að vísu þurfti ég að gera ráð fyrir að í Dirichlet-röðinni fyrir þessi næstum lotubundnu föll, þá þyrfti að vera minnsti veldisvísir. Það var flokkur af næstum lotubundnu föllum, sem var kallaður „normal“ næstum lotubundin föll. Það gerði hlutina talsvert einfaldari og ég hef ekki enn þann dag í dag losnað við þá forsendu.

Svo var náttúrlega aðalatriðið eftir. Það var önnur aðalsetning Nevanlinna. Það var ansi flókið að alhæfa hana og það var nú sem mestur tíminn fór í. Setningin hjá Nevanlinna er dálítið flókin og sönnunin er mjög löng, en hjá mér var þetta miklu verra því það eru svo mörg tæknileg atriði sem koma fram.

Sönnun mín er 50 síður. Afleiðingar af þessu voru „defektrelationir“ alveg eins og hjá Nevanlinna, en það þurfti dálítið nýjar aðferðir til að sanna þær.

Nú, svo var líka að hjá Nevanlinna eru föllin nærfáguð, en nærfáguð næstum lotubundin föll eru nauðsynlega fáguð. Ég hugsaði nú svolítið um þetta líka eftir að ég kom til Princeton, en þá var ég að fá áhuga á öðru og ég bjó þetta aldrei til prentunar fyrr en að það var 100 ára afmæli Haralds Bohr árið 1986. Þá gróf ég nú upp þessa grein og hélt erindi um aðalniðurstöðurnar, án sannana að vísu.

RM: En þú fékkst verðlaunin?

SH: Já, svo ég fékk verðlaunin fyrir þetta, gullpening upp á 50 grömm og þúsundkall. Þetta var tilkynnt sumarið eftir.

RS: Og hvað gátu nú ungir stúdentar gert við 1000 danskar krónur á þessum tíma?

SH: Ég bjó þá Hagemanns kollegium, þar sem ég hafði fæði og húsnæði. Ég borgaði 150 krónur á mánuði. Það sýnir að það munaði svolítið um þetta. En aðalgagnið sem ég fékk að þessu var að læra að vinna sjálfstætt, af því að ég fékk enga hjálp neins staðar frá. Mér fannst það vera mín skylda að tala ekki við neinn um þetta.

RS: Hefur þú nokkurn tíma fengið að vita hverjir kepptu við þig?

SH: Þetta var ekki keppni við neinn (nema mann sjálfan). Fleiri en einn geta fengið verðlaunin. Í næsta hefti af Festskrift háskólans er skrifaður ritdómur um allar greinarnar, jafnvel um þær sem ekki fá nein verðlaun. Það er um tvenns konar verðlaun að ræða, það er annað hvort gullmedalía með peningunum eða það sem var kallað „accessit“, sem sagt heiðarleg tilraun sem fékk smá verðlaun, kannske 500 krónur, en ekki neitt meira.

RM: Ertu þarna útskrifaður úr Kaupmannahafnarháskóla? Ferðu þá beint til Princeton?

SH: Við skulum sjá, ég sendi þetta inn 15. janúar 51. Síðan tek ég svokallaðan „magisterkonferens“, sem er skriflegt og munnlegt próf og ritgerð. Þessa ritgerð gat ég notað í það, svo ég slapp að vísu frekar billega þess vegna. Einhvern veginn hugsaði ég ákaflega lítið um framtíðina, en það var bara tilviljun að ég frétti um að það voru Fullbright-styrkir til háskólanáms í Bandaríkjunum. Annars hafði ég dálítinn augastað á að kenna stærðfræði á Akureyri. Mér þótti vænt um að vinur minn frá Höfn, Jón Hafsteinn Jónsson, fór í þá stöðu síðar. Svo sótti ég um Fullbright-styrk og fór þá til Princeton. Það var að mörgu leyti þægilegasti staðurinn fyrir mig til þess að fara á, vegna þess að prógrammið þar var svo laust í reipunum. Það voru að vísu kúrsusar, en það voru ekki próf í hverjum kúrsusi, eins og gerist yfirleitt við háskóla vestra. Það hefði hentað mér miklu síður að þurfa að taka próf í hverjum einasta kúrsi.

RS: Voru ekki Evrópumenn í stærðfræði, eðlisfræði, efnafræði og raunar öllum raungreinum allir á leið vestur til Bandaríkjanna á þessum árum?

SH: Ekki þekki ég tölur um það, en í Danmörku voru bara örfáir sem útskrifuðust í stærðfræði á þessum árum. Ég held að ég hafi verið sá eini sem tók prófið í janúar 1952. Síðan voru nokkrir fleiri sem tóku það um sumarið, en þeir stefndu ekki til neinna rannsókna í stærðfræði.

RS: Hvernig var með tengsl Danmerkur við önnur lönd á þessum tíma, segjum við Frakkland, Svíþjóð og Þýskaland? Var kannske stærðfræðin alveg í molum í Þýskalandi á þessum áratug, þannig að þangað var ekkert að sækja?

SH: Já, stærðfræðin var í molum í Þýskalandi ekki aðeins stríðsins vegna, en einnig af því að svo margir stærðfræðingar flúðu undan ofsóknum nazista fyrir stríð. Í Frakklandi var hins vegar margt að gerast í stærðfræði á þessum árum. Það var dálítið samband við Lund. Ég man eftir því að ég fór stundum til Lundar. Það var nú aðallega vegna þess að ég þekkti Íslending þar sem hét Björn Lárusson, en svo kynntist ég þar nokkrum stærðfræðingum líka. Það var stærðfræðiklúbbur þarna á institútinu í Höfn sem var kallaður Parentesen. Einhvern tíma fór klúbburinn í ferð til Lundar, svona 20 manns. Þar voru einhverjir stærðfræðifyrirlestrar og einhver hátíðahöld. Ég man nú ekki hvert tilefnið var. Ég sá þar Marcel Riesz í fyrsta skipti.

RS: Hann var aðalprófessorinn þarna.

SH: Já, hann var mjög áberandi.

RS: Var Gårding orðinn prófessor þá? Hann varð það mjög ungur.

SH: Þetta mun hafa verið 1949. Ég er nú ekki viss um það, en ég man eftir honum og ég vissi vel að Svíar voru talsvert virkari í stærðfræðirannsóknum en Danir á þeim tíma. Dönsk stærðfræði var dálítið lengi að ná sér eftir stríðið.

RS: Voru margir kennarar við skólann eða virkir vísindamenn, sem flúðu Danmörku á stríðsárunum?

SH: Bohr sjálfur fór til Svíþjóðar og Fenchel líka. Þeir voru báðir held ég við Lund. Fenchel var prófessor á Polyteknisk læreanstalt, en hann var sá sem kannske hafði mest áhrif á mig vegna þess að hann var geómetrískur. Ég fékk lánaða hjá honum bók sem hann hafði skrifað um prójektíva geómetríu, sem var ljómandi rit. Ég hitti hann einstöku sinnum. Eftir að þessi erfiða „forprøve“ var búin, þá var maður ákaflega frjáls og ég hefði getað lokið þessu námi miklu fyrr heldur en ég gerði.

RS: Við höfum hoppað dálítið fram og til baka, en nú erum við komnir til Princeton 1952. Hverjir voru þínir helstu kennarar þar?

SH: Það var Bochner, Feller og Artin í algebru og Fox í topológíu. Svo var ég í seminari sem Artin hafði, þar sem nemandi hans John Tate hélt reglulega fyrirlestra einu sinni í viku. Það var um algebrulega talnafræði og ég hafði lesið mér svolítið til í því fagi. Ég hafði lesið bókina hans Hecke í Kaupmannahöfn, þannig að ég var sæmilega fær um að skilja það sem hann talaði um, enda var hann ágætur fyrirlesari, John Tate. Bochner hélt fyrirlestra um komplexa analysu og Feller í real analysu. Þetta var nú að mörgu leyti endurtekning frá því sem ég hafði áður haft. Svo voru þarna einstöku fyrirlestrar á Institute for Advanced Study. Beurling var nýkominn þangað og hann hafði vikulega seminör. Það passaði vel fyrir mig, en aðalgreinarnar í Princeton voru topológía og komplex analysa í fleiri breytistærðum, mennirnir þar voru Spencer og Kodaira. Ég lagði það nú ekki fyrir mig.

RS: Hvenær kom að því að velja efni fyrir doktorsritgerð?

SH: Fyrsta árið hafði ég nú ekki neitt sérstakt í huga. Ég fór að setja mig svolítið inn í „abstract harmonic analysis" af því að það var dálítið tengt næstum lotubundnum föllum og ég hafði lesið þessa bók hans Maak, *Fastperiodische Funktionen*, sem er skrifuð frá grúputeóretísku sjónarmiði, mjög auðveld bók aflestrar. Þá um sumarið 1953 var ég í Princeton og þá datt mér í hug próblem í sambandi við næstum lotubundin föll, svokallað „multiplier problem". Fourier-röð fyrir næstum lotubundið fall skrifar maður sem $\sum a(\lambda)e^{i\lambda x}$ og leggur saman yfir allar rauntölur λ. Þetta er samt röð vegna þess að stuðullinn $a(\lambda)$ er núll nema fyrir teljanlega mörg λ og spurningin var: Með hvaða föllum af λ má maður margfalda $a(\lambda)$, þannig að þetta verði áfram Fourier-röð? Þetta var gamalt próblem að vísu, en ég vissi að það var langt frá því að vera leyst. Sértilfelli af þessu próblemi er þegar þessi margfaldari tekur bara gildin 0 eða 1. Þá er spurningin: Hvaða mengi í $\mathbf{R}$ eru þau, þannig að ef maður einskorðar λ við það mengi og heimtar að röðin sé Fourier-röð til að byrja með, þá haldi hún áfram að vera Fourier-röð? Mér tókst nú að leysa þetta margfaldarapróblem.

RS: Er hægt að lýsa lausninni í einföldu máli?

SH: Sérhver margfaldari er línuleg samantekt af jákvætt ákvörðuðum föllum, en þau eru ekki samfelld. Venjulega eru jákvætt ákvörðuð föll samfelld, en þessi eru það ekki. Það má sanna að ef jákvætt ákvarðað fall er mælanlegt, þá er það samfellt, þannig að þessi föll þurfa ekki einu sinni að vera mælanleg.

RM: Hvað þýðir að fall sé jákvætt ákvarðað?

SH: Ef maður tekur hvaða punkta sem er x_i og x_j, þá er fylkið $(f(x_i)f(x_j))$ jákvætt ákvarðað (positive definite). Það var sumarið 1953 sem ég sannaði þetta og þetta var í raun mjög auðvelt að sanna með abstrakt aðferðum. Næstum lotubundin föll má skilja best á grúpufræðilegan hátt, þ.e.a.s. maður hefur **R**, svo tökum við **R** með diskret topológíu og síðan karaktergrúpuna fyrir þessa diskretu grúpu. Þetta er stundum kallað Bohr-þjöppun, að vísu að ástæðulausu því Bohr notaði hana aldrei að ég held. Þetta er þjöppuð grúpa $\tilde{\mathbf{R}}$, sem inniheldur **R** og ef maður hefur næstum lotubundið fall á **R**, þá er hægt að útvíkka það yfir í samfellt fall á $\tilde{\mathbf{R}}$, og öfugt. Þannig að teórían fyrir næstum lotubundin föll á **R** er sú sama og teórían fyrir samfelld föll á þjappaðri abelskri grúpu. Þetta notaði ég, en þessi aðferð hafði ekki verið notuð áður. En ef maður notar þetta, þá er sönnunin mjög auðveld. Ég bætti svo við ýmsum afleiðingum.

RS: Þannig að frumlega hugmyndin er fólgin í því að nota grúpuna.

SH: Já, hún var ekki vel þekkt og þó við hefðum seminör í næstum lotubundnum föllum í Kaupmannahöfn, þá var aldrei minnst á þetta, þó það væri að mörgu leyti aðalatriðið. Fyrsta bókin sem ég las í Princeton var eftir Pontrjagin um topológiskar grúpur. Þá kemur þessi karaktergrúpa inn.

Bochner var í fríi, seinna misserið, vorið 1953, þannig að ég talaði aldrei við hann um þessar niðurstöður. Svo kemur hann um haustið 1953 og þá er ég búinn með þetta. Þá sagði hann: „Já, þetta er nóg, ... you can say you have a thesis“. Þetta kom alveg flatt upp á hann, því á þeim árum þegar hann hugsaði um næstum lotubundin föll hafði grúpan $\tilde{\mathbf{R}}$ ekki komið fram.

RM: Við ættum kannske að skjóta því hér inn, af því að þú hefur ekki sagt frá því, að formlega séð var Bochner leiðbeinandi þinn.

SH: Hann var í raun ekki leiðbeinandi fyrr en ég var búinn að skrifa ritgerðina.

Svo hélt ég áfram á þessu sviði með Banach-algebrur. Þá voru þær orðnar dálítið móðins og Beurling hafði meira að segja farið svolítið inn á þær í sínu seminari. Bók Loomis um *Abstract Harmonic Analysis* var þá komin út og ég fór að setja mig svolítið inn í það líka. Aðalparturinn í doktorsritgerðinni var ekki þetta heldur nokkuð sem ég kallaði „derived algebra“ í Banach-algebrum. Ég veit ekki hvort þið hafið kynnst Banach-algebrum. Í Banach-algebru er náttúrlega norm frá byrjun, en svo er annað norm sem er kallað „the spectral norm“ og annað er minna en hitt. Þá kom ég með spurningu: Hvaða stök í algebrunni hafa þann eiginleika að margföldun með því staki er samfelld vörpun frá öðru norminu yfir í hitt. Þessi marföldun er virki, sem hefur sitt eigið norm og með því normi er það ný Banach-algebra. Ég hafði ýmsar setningar sem gilda almennt um þessar algebrur, en það var gaman að líta á ýmis dæmi. Til dæmis ef maður tekur L^1 á þjappaðri grúpu, þá er L^2 afleidda algebran af L^1. Ef grúpan er ekki þjöppuð er afleidda algebran 0. Þetta kom síðar í bók *The multiplier problem* eftir R. Larsen.

RS: Er auðvelt að sjá þetta?

SH: Nei, það er í sjálfu sér ekki auðvelt. Það þarf að sanna að virkjanormið, sem fæst með margfölduninni, sé jafngilt L^2. Sá virki hefur alltaf norm sem er minna en L^2-normið og stærri en fasti sinnum L^2-normið. Sá fasti er til fyrir sérhverja þjappaða grúpu (víxlna eða ekki), en er háður grúpunni. Hann er kallaður Helgason-fastinn og enginn veit hver hann er.

RS: Ekki einu sinni Helgason sjálfur!

SH: Ég er sannfærður um að hann er $1/\sqrt{2}$ fyrir hringinn.

RS: Jahá?! Hvernig tengist þá $1/\sqrt{2}$ hringnum?

SH: Það er eftir talsverðum útreikningum.

RS: En er þetta ekki staðfest, eða hvað!?

SH: Nei, það er ekki staðfest. Ég varð sannfærður um það á sínum tíma, en hef ekki gengið alveg úr skugga um það. En aðferðin til þess að gera þetta er að nota Hölder-ójöfnur, þar sem maður miðar L^4-normið við L^1 og L^2. Þannig fær maður mat á L^1. Það kom út úr þessu sönnun á setningu eftir Littlewood, sem segir að ef maður hefur Fourier-röð fyrir L^1-fall, sem heldur áfram að vera Fourier-röð eftir að maður margfaldar stuðlana með þætti með normi 1, þá hlýtur það að hafa verið L^2-fall til að byrja með. Ég held að Littlewood hafi meira að segja sýnt, að það er nóg að einskorða sig við -1 og 1. Þá datt mér í hug í sambandi við þetta önnur spurning: Ef maður er með Fourier-röð fyrir L^1-fall, þannig að það má umraða stuðlunum við veldisvísisföllin, þ.e.a.s. maður heimtar að fyrir sérhverja umröðun σ af heilu tölunum sé $\sum a(\sigma(n))e^{inx}$ alltaf Fourier-röð fyrir eitthvert fall í L^1, þá sannaði ég líka að þetta hlýtur að vera L^2-fall til að byrja með.

RS: Varstu með þetta í ritgerðinni líka?

SH: Já, ég var með þetta líka. Sönnunin er mjög stutt. Doktorsritgerðin kom út í tveimur pörtum. Banach-algebruatriðin komu út í Annals of Mathematics undir titlinum „Multipliers of Banach Algebras“, en efnið um næstum lotubundin föll kom út í Mathematica Scandinavica. Báðir hlutarnir komu út 1955–6.

Bochner var náttúrlega leiðbeinandi minn, en hann var alltaf að stinga upp á hinum og þessum vandamálum, sem ég hafði engan áhuga á. Það kom í ljós að okkar smekkur var gerólíkur. Hann var alltaf að segja „Analysis deals with inequalities. Það er allt of fáar ‚inequalities' hjá þér“. Ég hefði þá átt að sýna honum sönnun mína á víkkuninni á annarri aðalsetningu Nevanlinna. Þar eru 50 síður af ójöfnum. En hann var mjög sympatískur, mjög uppörvandi.

RM: Var Bochner Bandaríkjamaður?

SH: Nei, hann kom frá Póllandi. Hann var interessant karakter. Hann skrifaði sína doktorsritgerð á sama tíma og Bergman og hann kom með það sem nú er kallað „Bergman kernel function". Hins vegar missti hann alveg af bátnum vegna þess að hann hafði ekki Bergman-metrikina. En hann hafði kjarnafallið sjálft. Það var í doktorsritgerð hans frá 1922. Svo koma greinar Haralds Bohr. Bochner verður mjög spenntur fyrir þeim og hann fer að stúdera nýjan flokk af föllum, sem hann kallaði normal lotubundin föll. Hann sannar að það eru svipaðar setningar sem gilda fyrir normal lotubundin föll eins og fyrir næstum lotubundin föll. Hann skrifaðist mikið á við Bohr um þetta og ég hef lesið þær bréfaskriftir þegar ég hef verið í Höfn. Svo kemur í ljós að þetta eru sömu föllin.

RS: Skilgreiningarnar eru væntanlega mjög ólíkar til að byrja með.

SH: Gerólíkar. Skilgreining Bochners er í rauninni miklu betri af því að hún passar fyrir grúpur. Skilgreiningin er þannig að ef maður tekur allar hliðranir af fallinu, þá er það tiltölulega þjappað mengi. Það má finna samleitna hlutrunu í sérhverri runu. Þetta passar við allar grúpur, jafnvel ekki kommútatívar grúpur.

RS: Hver sannaði að þessir flokkar væru þeir sömu?

SH: Þetta leiðir af því sem Bochner sannaði. Eftir á var þetta svo sannað beint. Hann hefur sjálfsagt orðið fyrir miklum vonbrigðum. Þetta er ekki í bók Bohr, en er í bók Besicovich um efnið. Svo kom hann til Kaupmannahafnar um það bil 1929 frá Þýskalandi, ég held að hann sé doktor frá Berlín. Svo fær hann stöðu í München, en fer til Bandaríkjanna fyrir Hitler-tímann. Hann var gyðingur. Hann hefur misst dálítið af bátum á sínum ferli. Til dæmis kom hann með Zorns lemmu, en að vísu var formúleringin ekki eins einföld og hjá Zorn, en hann sannaði að hún væri jafngild „axiom of choice", valfrumsendunni. Hann sannaði líka að staðþjappað Banach-rúm væri af endanlengri vídd. Hann formúleraði þetta ekki á þennan hátt, en hann sannaði það í tilfelli, þar sem sönnunin var alveg almenn. Bochner lagði mikilvægan skerf í margar greinar stærðfræðinnar.

RM: Við þekkjum hann aðallega fyrir Bochner-heildið.

SH: Já, það er líka til.

RS: Við tvinnfallafræðingar þekkjum hann vel fyrir Bochner-Martinelli formúluna fyrir fáguð föll sem er mikið notuð í tvinnfallagreiningu.

SH: Hann er mjög í tísku núna í diffurrúmfræði. Þessi „Bochner-technique" kemur mjög oft fyrir núna. Bochner-integralið er ekki sérlega merkilegt.

Hér nefnir Sigurður diffurrúmfræði, fag sem hann er mjög þekktur fyrir. Setjum við hér skil og verður seinni hluti birtur í næsta fréttabréfi.